

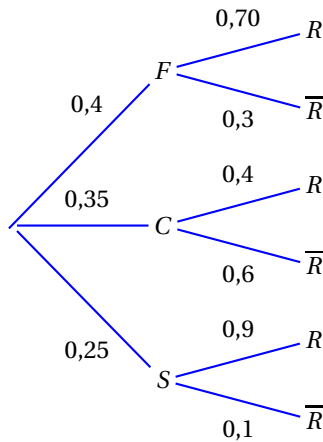
**EXERCICE 1**

**4 points**

Commun à tous les candidats

**Partie A**

1.  $P(F)$  est la probabilité que la table choisie au hasard soit occupée par une famille.  
On a donc  $P(F) = 0,4$ .  
 $P_S(R)$  est la probabilité que le serveur reçoivent un pourboire sachant que la table est occupée par une personne seule.  
On a donc  $P_S(R) = 0,9$ .
2. L'arbre complété est le suivant :



3. a.  $P(F \cap R) = P(F)P_F(R) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$
- b.  $P(R) = P(F \cap R) + P(F \cap C) + P(F \cap S) = 0,28 + 0,35 \times 0,4 + 0,25 \times 0,9 = 0,645$
- 4.

$$P_R(C) = \frac{P(R \cap C)}{P(R)} = \frac{0,14}{0,645} \approx 0,217$$

La probabilité que la table soit occupée par un couple, sachant que le serveur a reçu un pourboire est d'environ 0,217.

**Partie B**

1. a.

$$P(6 \leq X \leq 24) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

La probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soient compris entre 6 et 24 euros est d'environ 0,95.

- b.

$$P(X \geq 20) \approx 0,13$$

- 2.

$$P_{6 \leq X \leq 24}(X \geq 20) = \frac{P(20 \leq X \leq 24)}{P(6 \leq X \leq 24)} \approx \frac{0,11}{0,954} \approx 0,12.$$

**EXERCICE 2****4 points****Commun à tous les candidats****1. La proposition correcte est la proposition c.**

Chaque choix de jeune peut être considéré comme une épreuve de Bernoulli. Le succès est l'évènement « le jeune est fumeur régulier ». La probabilité de succès est 0,236. On répète 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Si on note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de succès,  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = 0,236$ .

$$P(X = 0) = 0,764^{10} \approx 0,068$$

**2. La proposition correcte est la proposition a.**

La taille de l'échantillon  $n$  est supérieure à 30. On a également

$$np = 500 \times 0,236 = 118 \geq 5 \text{ et } n \times (1 - p) = 500 \times 0,764 = 382 \geq 5.$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est donc

$$\left[ p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

$p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,236 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,236 \times 0,764}}{\sqrt{500}} \approx 0,198$ . Pour la borne inférieure, on donne une valeur approchée par défaut.

$p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,236 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,236 \times 0,764}}{\sqrt{500}} \approx 0,274$ . Pour la borne supérieure, on donne une valeur approchée par excès.

**3. La proposition correcte est la proposition a.**

$$2 \times 1,96 \times \frac{\sqrt{0,236 \times 0,764}}{\sqrt{n}} \leq 0,01 \iff \frac{\sqrt{0,236 \times 0,764}}{\sqrt{n}} \leq \frac{0,005}{1,96} \iff \sqrt{n} \geq \frac{1,96 \sqrt{0,236 \times 0,764}}{0,005}$$

$$n \geq \left( \frac{1,96 \sqrt{0,236 \times 0,764}}{0,005} \right)^2 \approx 27707.$$

**4. La proposition correcte est la proposition b.**

Dans cet échantillon de 250 jeunes fumeurs, la fréquence  $f$  de filles est  $\frac{99}{250}$  soit 39,6 %.

On a bien  $n \leq 30$ ,  $nf \leq 5$  et  $n(1-f) \leq 5$ . L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est donné par la formule suivante.

$$\left[ f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

$f - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,396 - \frac{1}{\sqrt{250}} \approx 0,33$ . On arrondit la borne inférieure par défaut.

$f + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,396 + \frac{1}{\sqrt{250}} \approx 0,46$ . On arrondit la borne supérieure par excès.

**EXERCICE 3****5 points****Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de la spécialité et candidats de la série L**

1. a.  $a_1$  correspond au nombre d'inscrits en 2014. Il y a 80 % des inscrits de 2013 qui renouvellent leur inscription, soit  $0,8 \times 2500$  soit 2 000 personnes. Avec 400 nouveaux adhérents, on peut donc compter sur 2 400 inscriptions.  $a_1 = 2400$ .

De même,  $a_2 = 0,8 \times 2400 + 400 = 2320$

- b. Pour l'année  $2013 + n + 1$ , le nombre d'anciens adhérents renouvelant leur inscription représente 80 % des inscrits de l'année précédente, soit  $0,8a_n$ . En ajoutant 400 nouvelles inscriptions, on obtient bien, suivant la modélisation proposée,

$$a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400.$$

2. a. Pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$v_{n+1} = a_{n+1} - 2000 = 0,8a_n + 400 - 2000 = 0,8a_n - 1600 = 0,8(a_n - 2000) = 0,8v_n$$

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,8.

De plus,  $v_0 = a_0 - 2000 = 2500 - 2000 = 500$ .

- b. On déduit de la question précédente que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = 500 \times 0,8^n$ .  
Par suite,  $a_n = v_n + 2000 = 500 \times 0,8^n + 2000$ .
- c. Une suite géométrique de raison strictement comprise entre  $-1$  et  $1$  converge vers 0. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n + 2000 = 2000.$$

- d. Au fil des années, le nombre d'adhérents se stabilisera autour de 2000.
3. a. Cet algorithme permet de déterminer à partir de quelle année le nombre d'adhérents passera en dessous des 2050.
- b.  $a_{10} \approx 2054$  et  $a_{11} \approx 2043$ . La réponse donnée par l'algorithme est donc  $n = 11$  et c'est donc en 2024 que le nombre d'adhérents sera inférieur pour la première fois à 2050.

## EXERCICE 4

6 points

Commun à tous les candidats

### Partie A

1. a.  $u$  étant une fonction dérivable sur un intervalle, la dérivée de la fonction  $e^u$  sur cet intervalle est  $u'e^u$ .

On a donc  $f'(x) = 1 - e^{-x+0,5}$

- b.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x+0,5} = 0 \Leftrightarrow e^{-x+0,5} = 1 \Leftrightarrow -x + 0,5 = 0 \Leftrightarrow x = 0,5.$$

- c.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x+0,5} > 0 \Leftrightarrow e^{-x+0,5} < 1 \Leftrightarrow -x + 0,5 < 0 \Leftrightarrow x > 0,5.$$

$f'$  est donc négative sur  $[0 ; 0,5]$  et positive sur  $[0,5 ; 5]$ .

$x$	0	0,5	5
$f'(x)$		-	+
d.		0	
$f$	$1 + e^{0,5}$	$2,5$	$6 + e^{-4,5}$

2. a.

$$2 \leq \alpha \leq 2,5.$$

- b. Les solutions sont les abscisses des points de  $\mathcal{C}$  qui sont en dessous de la droite  $\Delta$ .  $\mathcal{S} = [\alpha ; 5]$ .

**Partie B Application**

1. a. On utilise la valeur pour laquelle le minimum de la fonction  $f$  est atteint. Il faut produire 50 cartes pour que le coût d'utilisation de la machine soit minimal.

b.

$$B(x) = 1,5x - f(x) = 1,5x - (x + 1 + e^{-x+0,5}) = 0,5x - 1 - e^{-x+0,5}.$$

2. a.

$$B'(x) = 0,5 + e^{-x+0,5}.$$

Une exponentielle est toujours positive, donc  $B'$  est strictement positive sur  $[0 ; 5]$  donc  $B$  est strictement croissante sur  $[0 ; 5]$ .

- b.  $B(0) = -1 - e^{0,5} < 0$  et  $B(5) = 1,5 - e^{-4,5} > 0$ .

La fonction  $B$  est continue et strictement croissante sur  $[0 ; 5]$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, le nombre 0 admet un et un seul antécédent par  $B$  sur  $[0 ; 5]$  et donc l'équation donnée a une et une seule solution  $\beta$ .

D'après la calculatrice  $B(2,32) < 0$  et  $B(2,33) > 0$ . Donc  $2,32 < \beta < 2,33$ .

3. L'entreprise réalise un bénéfice pour une quantité de cartes produites supérieure ou égale à 233.