Math93.com
MathExams.fr

# Baccalauréat 2014 - ES/L Polynésie

## Série ES/L Obli. et Spé.
## Vendredi 13 juin 2014
## Correction

---

## Exercice 1. Probabilités — 5 points

**Commun à tous les candidats.**

### Partie A

**Peut-on considérer, en s'appuyant sur le document 1 que les filles inscrites sont sous-représentées en CPGE ? Justifier la réponse. On pourra utiliser un intervalle de fluctuation.**

- **1. Analyse des données** :
  - « *En France, pendant l'année scolaire 2009-2010, sur 81 135 étudiants inscrits en classe préparatoire aux grandes écoles (CPGE), on pouvait trouver 34 632 filles.* »

    Donc la la fréquence observée $\boxed{f = \dfrac{34\,632}{81\,135} \approx 0{,}426\,844 \approx 42,7\%}$ ;
  - Selon l'INSEE, la proportion de filles parmi les jeunes entre 15 et 24 ans est de $\boxed{p = 49,2\,\%}$.
- **2. Intervalle de fluctuation** : On va regarder si la fréquence observée $f$ appartient à l'intervalle de fluctuation.

**Théorème 1** (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence $F_n$ d'un caractère dans un échantillon de taille $n$ est, si $p$ désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[ p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a $n = 81\,135$, $p = 49,2\%$ alors on sait que puisque :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 81\,135 \geq 30 \\ \checkmark & np = 81\,135 \times 49,2\% \approx 39\,918 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 81\,135 \times 50,8\% \approx 42\,217 \geq 5 \end{cases}$$

Les conditions de validité sont réunies donc l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour la fréquence $F_{81\,135}$ est :

$$I_{81\,135} = \left[ p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,492 - 1,96\frac{\sqrt{0,492 \times 0,508}}{\sqrt{81\,135}} \,;\, 0,492 + 1,96\frac{\sqrt{0,492 \times 0,508}}{\sqrt{81\,135}} \right]$$

$$\boxed{I_{81\,135} \approx [48,8\% \,;\, 49,6\%]}$$

- **3. Conclusion** : La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation

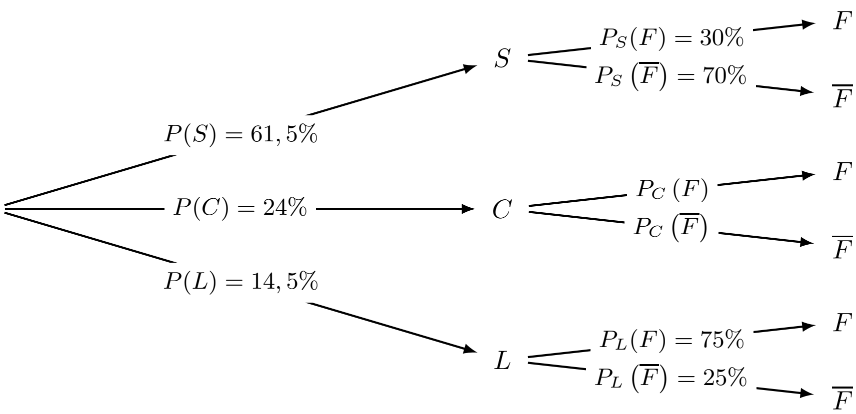
$$\boxed{f \approx 42,7\% \notin I_{81\,135}}$$

Donc **on considérer, en s'appuyant sur le document 1 que les filles inscrites sont sous-représentées en CPGE**.

## Partie B

**1. Donner les probabilités $P(S)$, $P(C)$, $P_L(F)$, $P_S(F)$ et $P(F)$. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation. Cet arbre sera complété au fur et à mesure de l'exercice.**

- $P(S) = 0,615$ car « la filière scientifique (S) accueille 61,5 % des étudiants » ;
- $P(C) = 0,24$ car « la série économique et commerciale (C) accueille 24 % des étudiants » ;
- $P_L(F) = 0,75$ car « En classes littéraires, la prépondérance des femmes [...] : avec trois inscrites sur quatre [...] ».
- $P_S(F) = 0,3$ car « Inversement, dans les préparations scientifiques, les filles sont présentes en faible proportion (30 %) ».
- $P(F) = 0,427$ car « On considère que parmi tous les inscrits en CPGE en 2009-2010, la proportion de fille est 42,7 % ».




**2. 2. a. Calculer la probabilité que l'étudiant interrogé au hasard soit une fille inscrite en L.**

« les autres étudiants suivent une filière littéraire (L) ». Donc :

$$\boxed{P(L) = 0,145 = 1 - 0,615 - 0,24}$$

**2. b. Calculer la probabilité de l'événement $F \cap S$. En déduire que la probabilité de l'événement $F \cap C$ est 0,133 75.**

- $P(F \cap S) = P_S(F) \times P(S) = 0,615 \times 0,3$ donc

$$\boxed{P(F \cap S) = 0{,}1845}$$

- D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \cap S) + P(F \cap C) + P(F \cap L) \\ P(F \cap C) &= P(F) - P(F \cap S) - P(F \cap L) \\ P(F \cap C) &= 0,427 - 0,1845 - P_L(F) \times P(L) \\ P(F \cap C) &= 0,427 - 0,1845 - 0,75 \times 0,145 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(F \cap C) = 0{,}133\,75}$$

**3. Sachant que l'étudiant interrogé suit la filière économique et commerciale, quelle est la probabilité qu'il soit une fille ? On arrondira le résultat au millième. Confronter ce résultat avec les informations du document 2.**

On cherche :

$$\boxed{P_C(F) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}133\,75}{0,24} \approx 0,5573}$$

**La parité est donc bien quasi vérifiée**.

**4. Sachant que l'étudiant interrogé est une fille, quelle est la probabilité qu'elle soit inscrite dans la filière littéraire L ? On arrondira le résultat au millième.**

On cherche :

$$\boxed{P_F(L) = \frac{P(F \cap L)}{P(F)} = \frac{0,75 \times 0,145}{0,427} \approx 0,255}$$

## Exercice 2. Obligatoire 5 points

**Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L**

## Partie A

**1. Quel est le coût total de production pour 450 objets ?**
Le coût de production pour 450 objets est de **24 000** euros.

**2. Combien d'objets sont produits pour un coût total de 60 000 euros ?**
On produit environ **640 objets** pour un coût total de 60 000 euros.

On considère que le coût marginal est donné par la fonction C' dérivée de la fonction C.

**2. a. Estimer le coût marginal pour une production de 450 objets puis de 600 objets.**

- Le coût marginal pour une production de 450 objets, soit 4,5 centaines d'objets, est donné par le nombre dérivé $C'(4,5)$. Il correspond donc au coefficient de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4,5.
  Par lecture graphique, $C'(4,5) = 0$ car la tangente est horizontale en ce point.
  **Le coût marginal pour une production de 450 objets est donc de 0 centaine d'euro soit 0 euro**.
- De même pour 600 objets, le coût marginal est donné par le nombre dérivé $C'(6)$. Il correspond donc au coefficient de la tangente à la courbe au point d'abscisse 6.
  Par lecture graphique :
  $$C'(6) = \frac{600 - 100}{7 - 5} = 250$$
  **Le coût marginal pour une production de 600 objets est donc de 250 centaines d'euros soit 25 000 euro**

**2. b. Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle [0 ; 7] » ?**
Sur l'intervalle $[0\ ;\ 4,5]$ le coût marginal décroit car les pentes des tangentes diminuent mais le coût marginal croît sur $[4,5\ ;\ 7]$ car les pentes des tangentes augmentent. **L'affirmation est donc fausse,**.

## Partie B

Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

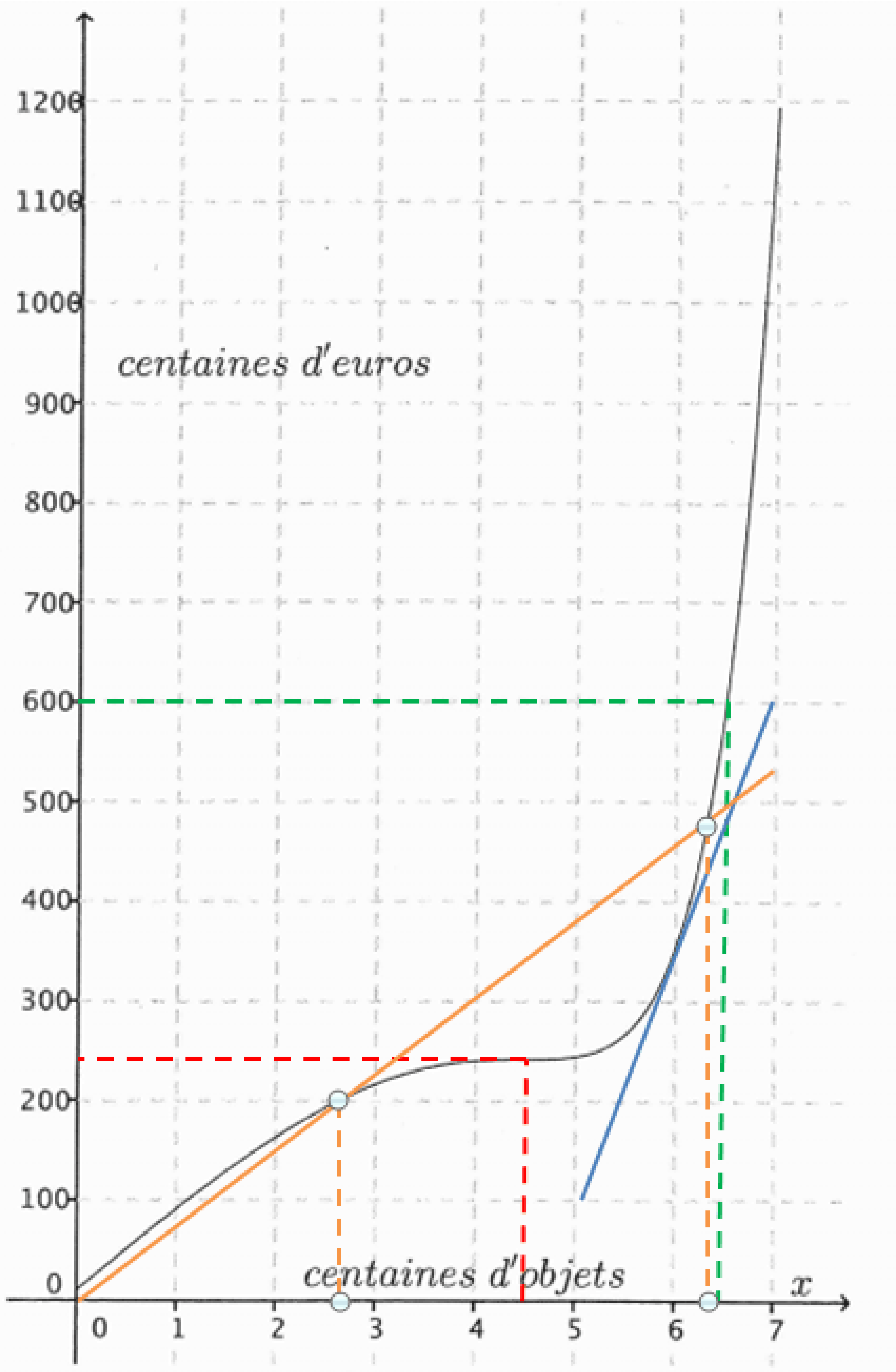
**1. On note $r$ la fonction « recette ». Pour tout nombre réel $x$ dans l'intervalle [0 ; 7], $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de $x$ centaines d'objets. Représenter la fonction $r$ dans le repère donné en annexe.**
La fonction recette est la fonction linéaire, définie sur l'intervalle [0 ; 7] définie par :

$$\boxed{r : \left\{ \begin{array}{rcl} [0\ ;\ 7] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & r(x) = 75x \end{array} \right.}$$

**2. En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.**

**2. a. En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise, la fourchette maximale de rentabilité ? Justifier la réponse.**
On cherche les valeurs de $x$ pour lesquelles la droite se trouve au-dessus de la courbe. La fourchette de rentabilité est donc pour une production comprise **entre 280 et 620 objets**.

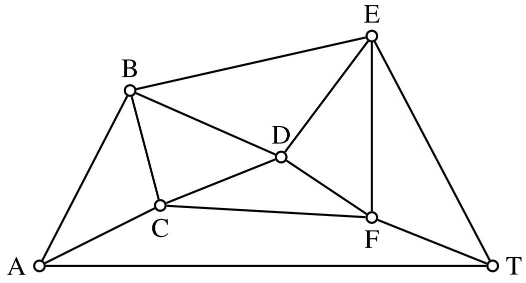
**2. b. Que penser de l'affirmation : « il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets » ?**
L'écart entre la droite et la courbe est plus important pour 500 objets que pour 600 objets. Il est donc préférable de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets.


1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
centaines d'euros
centaines d'objets
0
1
2
3
4
5
6
7
x

## Exercice 2. Spécialité : Graphe — 5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

### Partie A




**1. Déterminer le nombre de voies de circulation au total.**
Il y a 13 arêtes donc **13 voies de circulation** au total.

**2. Afin que l'aéroport soit déneigé le plus rapidement possible, est-il possible de planifier un parcours pour que les chasse-neige passent par toutes les voies sans emprunter plusieurs fois la même route ? Justifier la réponse et donner un tel parcours.**

- **Ce graphe est-il connexe ?**
  Un graphe est dit connexe si quels que soient les sommets u et v, il existe une chaîne de u vers v. C'est-à-dire, s'il existe une suite d'arêtes permettant d'atteindre v à partir de u. Dans le graphe proposé, il existe une chaîne entre chacun des sommets par conséquent ce graphe est connexe.
- Citons le théorème d'Euler

**Théorème 2** (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736 )

Un graphe connexe contient **une chaîne eulérienne** si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
Un graphe connexe contient **un cycle eulérien** si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (autrement dit tous ses sommets sont de degré pair).

**Remarque** : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions les degrés des sommets :

| Sommet | A | B | C | D | E | F | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 |

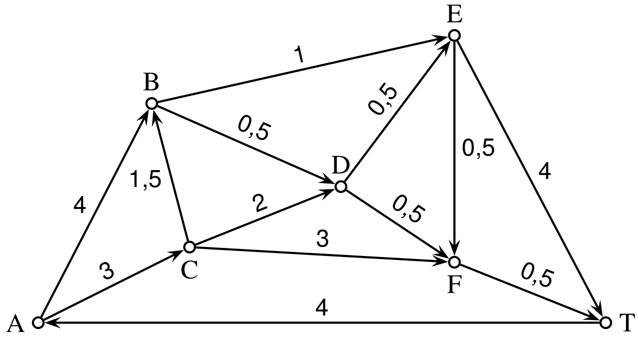
Donc **deux sommets sont de degré impair**, les sommets A et T. Par conséquent, d'après le théorème 2, ce graphe connexe admet une **chaine eulérienne**.
Il possible de planifier un parcours pour que les chasse-neige passent par toutes les voies sans emprunter plusieurs fois la même route.

- **Détermination d'une chaîne eulérienne**.
  D'après le théorème d'Euler, le graphe $\mathscr{G}$ admet donc une chaîne eulérienne. Les extrémités de la chaîne sont les sommets de degré impair, soit A et T.
  Pour déterminer une telle chaîne, on applique l'algorithme d'Euler et on trouve par exemple, par étapes successives :
  - **Étape 1 :** **A-T** (recherche d'une chaîne d'extrémités A et T)
  - **Étape 2 :** on insère le cycle **A-B-C-A** à la place de A dans la chaîne précédente.
    On obtient **A-B-C-A -T**
  - **Étape 3 :** on insère le cycle **B-E-D-B** à la place de B dans la chaîne précédente.
    On obtient **A-B-E-D-B-C-A -T**
  - **Étape 4 :** on insère le cycle **C-D-F-C** à la place de C dans la chaîne précédente.
    On obtient **A-B-E-D-B-C-D-F-C -A -T**

- **Étape 5 :** on insère le cycle **F-E-T-F** à la place de F dans la chaîne précédente.
  On obtient **A-B-E-D-B-C-D-F-E-T-F-C -A -T**
- **Étape 6 :** toutes les arêtes du graphe ont été utilisées. Une chaîne eulérienne possible est donc :
  $\boxed{\textbf{A-B-E-D-B-C-D-F-E-T-F-C -A -T}}$

## Partie B

Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies ainsi que le temps de parcours pour chacune en minute( s).




**1. 1. a. Écrire la matrice $M$ associée à ce graphe (ranger les sommets dans l'ordre alphabétique).**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**1. b. Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T.**
Le nombre de chemins reliant A à T est donné par le terme $a_{17} = a_{71} = 2$ de ma matrice $M^3$.
Il existe donc **2 chemins de longueurs 3 reliant A à T : ACFT et ABET**.

**2. L'avion qui a atterri est en bout de piste en A et doit se rendre le plus rapidement possible au terminal situé au point T. Déterminer l'itinéraire le plus rapide et en donner la durée.**
On utilise l'algorithme de Dijkstra.

| de .. à | à B | à C | à D | à E | à F | à T |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 4A | $\boxed{\textbf{3A}}$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| C(3A) | ~~(4,5C)~~ $\boxed{\textbf{4A}}$ | - | 5C | $\infty$ | 6C | $\infty$ |
| B(4A) | - | - | ~~5C~~ $\boxed{\textbf{4,5B}}$ | 5B | 6C | $\infty$ |
| D(4,5B) | - | - | - | $\boxed{\textbf{5B}}$ (= 5D) | ~~6C~~ 5D | $\infty$ |
| E(5B) | - | - | - | - | ~~5,5E~~ $\boxed{\textbf{5D}}$ | 9E |
| F(5D) | - | - | - | - | - | ~~9E~~ $\boxed{\textbf{5,5F}}$ |

**Le chemin le plus rapide est donc ABDFT pour une durée de 5,5 minutes.**

## Exercice 3. Suites — 5 points

**Commun à tous les candidats**

La suite $(u_n)$ est définie pour tout nombre entier naturel $n$ par : $\begin{cases} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$.

## Partie A

**1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel $n$ non nul donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang $n$. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Indiquer lequel et justifier pourquoi les deux autres ne peuvent donner le résultat attendu.**

- L'algorithme 1 n'affiche que le dernier terme calculé car l'instruction d'affichage n'est pas dans la boucle. En outre, pour $i = N$, on calcule $u_{N+1}$ et on affiche ce terme, l'algorithme affiche donc le terme $u_{N+1}$.
- L'algorithme 2 n'affiche que le premier terme 5 car l'initialisation de $U$ à 5 est dans la boucle et l'affichage de $U$ suit directement cette affectation.
- **L'algorithme 3 est donc le seul qui convient**.

| | | |
|---|---|---|
| **Variables :** | **Variables :** | **Variables :** |
| $U$ est un nombre réel | $U$ est un nombre réel | $U$ est un nombre réel |
| $i$ et $N$ sont des nombres entiers | $i$ et $N$ sont des nombres entiers | $i$ et $N$ sont des nombres entiers |
| **Début** | **Début** | **Début** |
| Saisir une valeur pour $N$ | Saisir une valeur pour $N$ | Saisir une valeur pour $N$ |
| $U$ prend la valeur 5 | Pour $i$ de 0 à $N$ faire | $U$ prend la valeur 5 |
| Pour $i$ de 0 à $N$ faire | $U$ prend la valeur 5 | Pour $i$ de 0 à $N$ faire |
| Affecter à $U$ la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$ | Afficher $U$ | Afficher $U$ |
| Fin Pour | Affecter à $U$ la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$ | Affecter à $U$ la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$ |
| Afficher $U$ | Fin Pour | Fin Pour |
| **Fin** | **Fin** | **Fin** |
| **algorithme 1** | **algorithme 2** | **algorithme 3** |

**2. On saisit la valeur 9 pour $N$, l'affichage est le suivant :**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3,5 | 2,75 | 2,375 | 2,185 | 2,0938 | 2,0469 | 2,0234 | 2,0117 | 2,0059 |

**Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de cette suite ?**
Il semblerait que la suite $(u_n)$ **soit décroissante** et ait pour **limite 2**.

## Partie B

On introduit une suite auxiliaire $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = u_n - 2$.

**1. Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique. Préciser sa raison $q$ et son premier terme $v_0$.**
Pour tout entier $n$ on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= 0,5\, u_n + 1 - 2 = 0,5\, u_n - 1 \\ &= 0,5\ (u_n - 2) = 0,5\, v_n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)$ est donc une suite **géométrique de raison $q = 0,5$, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$**.

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 3 \\ v_{n+1} & = 0,5\, v_n \end{cases} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

**2. Montrer que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a $u_n = 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.**

- Puisque la suite $(v_n)$ est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme 3, on peut écrire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

- De l'égalité $v_n = u_n - 2$ définie pour tout entier $n$, on peut en déduire l'expression de $u_n = v_n + 2$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

**3. Étudier les variations de la suite $(u_n)$.** Pour tout entier $n$ on a d'après la question **B. 2.** :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\
&= 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
u_{n+1} - u_n &= 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -1,5\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$$

**4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.**

**Théorème 3**

Si le réel $q$ est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0,5 < 1$ et d'après le théorème 3 : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times (0,5)^n = 0$.

Ce qui nous donne la limite de la suite $(u_n)$ : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2}$

**5. A partir de quel rang a-t-on : $u_n - 2 \leqslant 10^{-6}$ ?**

- **1ère méthode**
Puisque l'on a démontré que le suite $(u_n)$ est donc décroissante de limite 2 on sait qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite seront dans l'intervalle $\left[2\ ;\ 2 + 10^{-6}\right]$. Il suffit de trouver le premier terme qui vérifie cette inégalité. A l'aide de la calculatrice à obtient $u_{21} - 2 > 10^{-6}$ et $u_{22} - 2 < 10^{-6}$ donc $u_n - 2 \leqslant 10^{-6}$ à partir du **rang 22**.
- **2ème méthode** : On va résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :

$$\begin{aligned}
u_n - 2 \leqslant 10^{-6} &\iff 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-6} \\
&\iff \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{10^{-6}}{3}
\end{aligned}$$

En composant par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$u_n - 2 \leqslant 10^{-6} \iff n\ln(0,5) \leqslant \ln\left(\frac{10^{-6}}{3}\right)$$

et puisque $\ln(0,5) < 0$, en divisant les deux membres par $\ln(0,5)$ on a

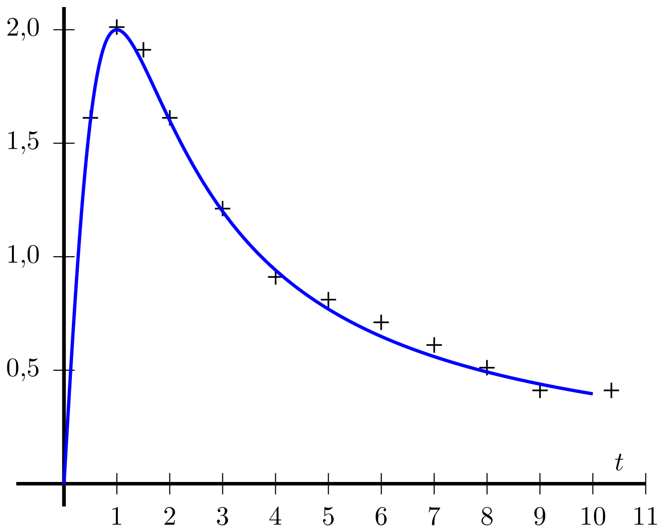
$$u_n - 2 \leqslant 10^{-6} \iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-6}}{3}\right)}{\ln(0,5)} \approx 21,52$$

Et puisque $n$ est entier on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\quad ;\ u_n - 2 \leqslant 10^{-6} \iff n \geq 22}$$

## Exercice 4. Étude de fonction 5 points

**Commun à tous les candidats** Les données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0\,;\ 10]$ par $g(t) = \dfrac{4t}{t^2+1}$. Lorsque $t$ représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique. Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction $g$.




**1. Par lecture graphique donner sans justification :**

**1. a. les variations de la fonction $g$ sur $[0\,;10]$ ;**
La fonction semble être croissante sur $[0\,;\ 1]$ et décroissante sur $[1\,;\ 10]$.

**1. b. la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;**
La concentration maximale est de **2 mg/l**.

**1. c. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l.**
La concentration semble être supérieure à 1,2 mg/l sur $\mathbf{[0,4\,;\ 3]}$

**2. 2. a. La fonction $g$ est dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$ et sa dérivée est $g'$. Montrer que : $g'(t) = \dfrac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$.**

La fonction $g$ est dérivable sur $[0\,;\ 10]$ et de la forme $\dfrac{u}{v}$ :

$$g(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \text{ avec } \begin{cases} u(t) = 4t & ; \quad u'(t) = 4 \\ v(t) = t^2+1 & ; \quad v'(t) = 2t \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0\,;\ 10],\ \ g'(t) = \frac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{v(t)^2}$$
$$g'(t) = \frac{4\,(t^2+1) - 4t\ 2t}{(t^2+1)^2}$$
$$g'(t) = \frac{4\ \left(t^2+1-2t^2\right)}{(t^2+1)^2}$$

$$\boxed{\forall t \in [0\,;\ 10],\ \ g'(t) = \frac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}}$$

**2. b. En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.**
Étudions le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[0\,;10]$.
Puisque le dénominateur $\left(t^2+1\right)^2$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$, la dérivée est du signe du numérateur $4\left(1-t^2\right)$, et donc de $\left(1-t^2\right)$.
La fonction $t \longmapsto \left(1-t^2\right)$ est une fonction polynôme du second degré dont l'étude est connue sur $\mathbb{R}$ :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \left(1-t^2\right) > 0 \Longleftrightarrow t \in ]-1\,;\,1[ \\ \left(1-t^2\right) = 0 \Longleftrightarrow t = 1 \text{ ou } -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \ \left(1-t^2\right) < 0 \Longleftrightarrow \mathbb{R}\backslash]-1\,;\,1[$$

Donc ici sur l'intervalle [0 ; 10] on obtient facilement :

$$\boxed{\forall t \in [0\ ;\ 10]\ ;\quad \left.\begin{array}{l} g'(t) > 0 \Longleftrightarrow t \in [0\ ;\ 1[ \\ g'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow\quad g'(t) < 0 \Longleftrightarrow ]1\ ;\ 10]}$$

La fonction $g$ **est donc croissante sur** $[0\ ;\ 1]$ **et décroissante sur** $[1\ ;\ 10]$.
Sur l'intervalle $[1\ ;\ 10]$, la fonction $g$ admet donc un maximum en $x = 1$ qui vaut $g(1) = 2$
**La concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection**.

**3. On admet que $G$ définie sur [0 ; 10] par $G(t) = 2\ln\left(t^2+1\right)$ est une primitive de $g$ sur cet intervalle. Quelle est la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures ? Donner la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.**
La valeur moyenne $m$ de la fonction $g$ sur $[0\ ;\ 10]$ est donnée par

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{10-0}\int_0^{10} g(x)\,\mathrm{d}x \\ m &= \frac{1}{10}\Big[G(t)\Big]_0^{10} \\ m &= \frac{1}{10}\ \left(G(10) - G(0)\right) \\ m &= \frac{1}{10}\ \left(2\ln\left(10^2+1\right) - \left(2\ln\left(0^2+1\right)\right)\right) \\ m &= \frac{1}{5}\ \ln(101) \end{aligned}$$

$$\boxed{m = \frac{1}{5}\ \ln(101) \approx 0,923}$$

**4. On définit la CMI (Concentration Minimale Inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier. La CMI de l'antibiotique injecté est $1,2$ mg/l. Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à -dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.**
On cherche à résoudre l'inéquation $g(t) > 1,2$ or pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ :

$$g(t) > 1,2 \Longleftrightarrow \frac{4t}{t^2+1} > 1,2$$

or puisque $t^2+1 > 0$ on peut multiplier les deux membres de l'inégalité par $t^2+1$

$$\begin{aligned} g(t) > 1,2 &\Longleftrightarrow 4t > 1,2(t^2+1) \\ g(t) > 1,2 &\Longleftrightarrow 0 > 1,2t^2 - 4t + 1,2 \end{aligned}$$

Alors avec $\Delta = 16 - 4\times 1,2\times 1,2 = 10,24 > 0$, le polynôme du second degré admet deux racines réelles qui sont :

$$t_1 = \frac{-4+\sqrt{10,24}}{2,4} = 3 \text{ et } t_2 = \frac{-4-\sqrt{10,24}}{2,4} = \frac{1}{3}$$

On a donc

$$\boxed{g(t) > 1,2 \Longleftrightarrow t \in \left]\frac{1}{3}\ ;\ 3\right[}$$

Le temps d'antibiotique utile est donc

$$\boxed{T = t_1 - t_2 = \frac{8}{3}\text{ h} = 2\text{ h} + \frac{2}{3}\text{ h} = 2\text{ h } 40\text{ min}}$$

**- Fin du Devoir -**