∽ Baccalauréat ES Asie 19 juin 2013 ∾

Corrigé

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Proposition 1 : fausse

$f'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point C ; cette droite passe par les points C et D. Son coefficient directeur est égal à $\dfrac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \dfrac{0-3}{4-2} = \dfrac{-3}{2} \neq -\dfrac{2}{3}$.

Proposition 2 : fausse

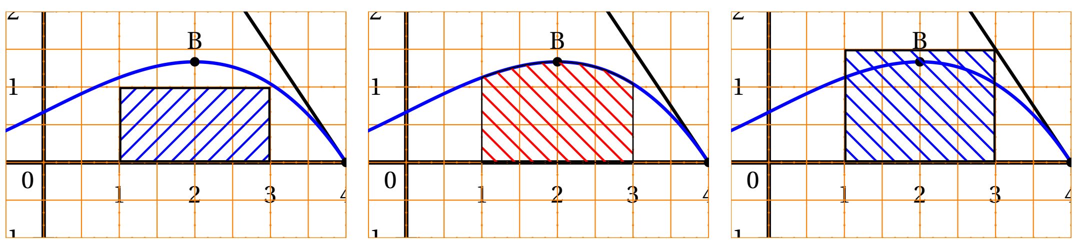
Une fonction est concave sur un intervalle si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes ; cela se produit lorsque sa dérivée est décroissante sur cet intervalle.

D'après le graphique et le texte, la dérivée de f est nulle en $x = -2$, puis est positive entre -2 et 2 et est à nouveau nulle en $x = 2$; donc f' n'est pas décroissante sur $[-2\,;\,2]$ et donc la fonction f n'est pas concave sur cet intervalle.

Proposition 3 : vraie

La fonction f est positive sur $[1\,;\,3]$ donc $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ (aire hachurée en rouge sur le dessin du milieu).

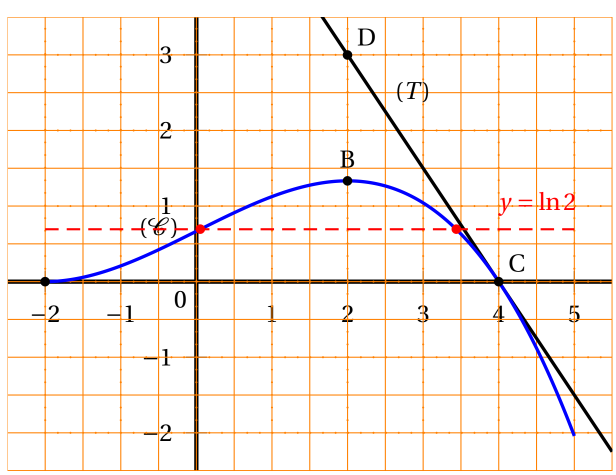
Cette aire est comprise entre 2 (aire du rectangle de gauche) et 3 (aire du rectangle de droite) :



Aire égale à 2 — $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ — Aire égale à 3

Proposition 4 : fausse

Les solutions de l'équation $f(x) = \ln 2$ sont les abscisses des deux points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y = \ln 2$; cette équation a donc deux solutions sur $[-2\,;\,5]$.



EXERCICE 2 — 5 points

Enseignement obligatoire et spécialité L

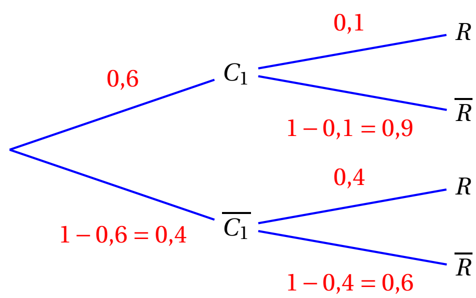
On s'intéresse aux résultats d'un concours où l'on ne peut pas se présenter plus de deux fois.

Partie A : étude des résultats de mai 2013

Les statistiques dressées à partir des résultats de la session de mai 2013 ont permis d'établir que :

1.
- 60 % des personnes qui présentaient le concours le présentaient pour la première fois donc $P(C_1) = 0{,}6$;
- 10 % de ceux qui le présentaient pour la première fois ont été admis donc $P_{C_1}(R) = 0{,}1$;
- 40 % de ceux qui le présentaient pour la seconde fois l'ont réussi donc $P_{\overline{C_1}}(R) = 0{,}4$.

On peut donc construire un arbre pondéré regroupant les résultats précédents et en déduire d'autres probabilités :



2. « La personne s'est présentée au concours pour la première fois et a été admise » est l'évènement $C_1 \cap R$:

$$P(C_1 \cap R) = P(C_1) \times P_{C_1}(R) = 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}06$$

3. « La personne est admise au concours » est l'évènement R.
D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(C_1 \cap R) + P(\overline{C_1} \cap R) = 0{,}06 + 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}06 + 0{,}16 = 0{,}22$$

4. Sachant que cette personne a réussi le concours, la probabilité qu'elle l'ait présenté pour la première fois est $P_R(C_1)$:

$$P_R(C_1) = \frac{P(C_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}06}{0{,}22} = \frac{3}{11} \approx 0{,}27$$

Partie B : résultats des établissements

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % du pourcentage d'étudiants admis est :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Le groupe est de 224 personnes donc $n = 224$ et le taux de réussite global est de 22 % donc $p = 0{,}22$:

$$I = \left[0{,}22 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}22 \times 0{,}78}}{\sqrt{224}}\ ;\ 0{,}22 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}22 \times 0{,}78}}{\sqrt{224}}\right] \approx [0{,}16\ ;\ 0{,}28]$$

2. Le pourcentage de reçus dans l'établissement étudié est de 26 % soit 0,26 ; ce nombre appartient à l'intervalle de fluctuation I donc on peut considérer que le taux de réussite de 26 % est un résultat « normal ». L'affirmation du directeur de l'établissement est donc erronée.

EXERCICE 2 **5 points**

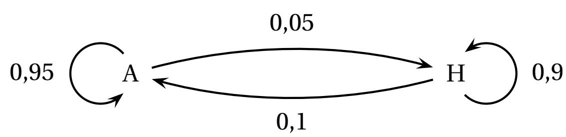
Enseignement de spécialité

Partie A

Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H.
Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur A » ;
- H désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur H ».

1. On dessine le graphe probabiliste associé à la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$:



Pour tout entier naturel n, on note :

— a_n la probabilité de l'évènement : « La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A » ;
— h_n la probabilité de l'évènement : « La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H » ;
— P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & h_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n.

2. Comme $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} = 1$, la matrice $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspond à un état probabiliste.
Pour qu'elle corresponde à l'état stable, il faut de plus que $P \times M = P$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \times 0{,}95 + \dfrac{1}{3} \times 0{,}1 & \dfrac{2}{3} \times 0{,}05 + \dfrac{1}{3} \times 0{,}9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{2 \times 0{,}95 + 0{,}1}{3} & \dfrac{2 \times 0{,}05 + 0{,}9}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} = P \end{aligned}$$

Donc la matrice $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable du système.

Cela signifie que, si une année les commandes se répartissent en proportion de $\dfrac{2}{3}$ pour le fournisseur A et de $\dfrac{1}{3}$ pour le fournisseur H, il en sera de même l'année suivante et donc toutes les années qui suivront.

3. On donne $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et on rappelle que $P_k = P_0 \times M^k$, pour k entier naturel.
On cherche n tel que $a_n > h_n$; pour cela on calcule, à la calculatrice :
$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}56 \end{pmatrix}$; $P_2 = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}474 & 0{,}526 \end{pmatrix}$ et $P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}5029 & 0{,}4971 \end{pmatrix}$
C'est donc à partir de la troisième semaine que, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H.

Partie B

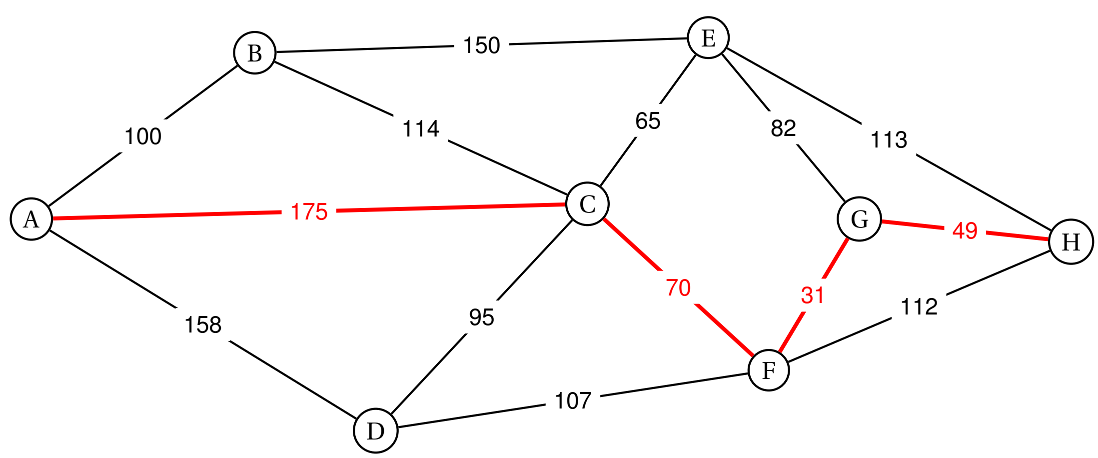
Le directeur de l'entreprise E rend visite à ses fournisseurs, il se rend du fournisseur A au fournisseur H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possible.
Son assistant dresse un graphe qui schématise les trajets, en kilomètres, entre les six villes de la région, notées B ; C ; D ; E ; F et G et les deux sites, A et H.

L'algorithme de Dijkstra va donner tous les trajets les plus courts partant du sommet A :

A	B	C	D	E	F	G	H	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	100 (A)	175 (A)	158 (A)	∞	∞	∞	∞	B (A)
		175 (A) ~~214 (B)~~	158 (A)	250 (B)	∞	∞	∞	D (A)
		175 (A) ~~253 (D)~~		250 (B)	265 (D)	∞	∞	C (A)
				~~250 (B)~~ 240 (C)	~~265 (D)~~ 245 (C)	∞	∞	E (C)
					245 (C)	322 (E)	353 (E)	F (C)
						~~322 (E)~~ 276 (F)	353 (E) ~~357 (F)~~	G (F)
							~~353 (E)~~ 325 (G)	H (G)

L'itinéraire le plus court pour aller de A à H est : A $\xrightarrow{175}$ C $\xrightarrow{70}$ F $\xrightarrow{31}$ G $\xrightarrow{49}$ H

Il a une longueur de $175 + 70 + 31 + 49 = 325$ kilomètres.



EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[1\ ;\ 26]$ par : $f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10$
où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
$f'(t) = 24 \times 1 \times \ln(t) + 24 \times t \times \dfrac{1}{t} - 6t + 0 = 24\ln(t) - 6t + 24$

2. a. On complète le tableau de variations de la fonction f' :
$f'(1) = 18 > 0$; $f'(4) = 24\ln 4 \approx 33{,}3 > 0$ et $f'(26) = 24\ln(26) - 132 \approx -53{,}8 < 0$

t	1		4		α		26
			33,3				
$f'(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	
	18						$-53{,}8$

D'après ce tableau de variations, l'équation $f'(t) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1 ; 26]$ et cette solution, appelée α, est dans l'intervalle $[4 ; 26]$.
Plus précisément : $f'(14) \approx 3{,}34 > 0$ et $f'(15) \approx -1{,}01 < 0$ donc $14 < \alpha < 15$.

b. Du tableau de variations, on peut déduire que $f'(t) > 0$ sur $[1 ; \alpha[$ et que $f'(t) < 0$ sur $]\alpha ; 26]$.
Donc la fonction f
- est strictement croissante sur $[1 ; \alpha]$;
- est strictement décroissante sur $[\alpha ; 26]$;
- atteint un maximum pour $x = \alpha$.

3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

a. L'expression mathématique suivante : « sur $[4\ ;\ 26]$, f' est décroissante » signifie que sur cet intervalle, la vitesse de propagation de la maladie diminue.

b. Le nombre de malades est donné par la fonction f ; ce nombre diminue quand la fonction f est décroissante, autrement dit quand sa dérivée f' est négative. D'après son tableau de variations, la dérivée f' est négative sur l'intervalle $]\alpha ; 26]$. Le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer est $\alpha - 1$ soit entre 13 et 14 puisque $14 < \alpha < 15$.
On est donc sûr qu'au bout de 14 semaines le nombre de malades a commencé à diminuer.

Partie B

On admet que la fonction G définie par $G(t) = 12t^2\ln(t) - 6t^2$
est une primitive sur $[1\ ;\ 26]$ de la fonction g définie par $g(t) = 24t\ln(t)$.

1. $f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10 = g(t) - 3t^2 + 10$; la fonction g a pour primitive la fonction G et la fonction $t \longmapsto -3t^2 + 10$ a pour primitive $t \longmapsto -t^3 + 10t$ (primitive d'une fonction polynôme).
Donc la fonction f a pour primitive sur l'intervalle $[1 ; 26]$ la fonction F définie par

$$F(x) = 12t^2\ln(t) - t^3 - 6t^2 + 10t.$$

2. On a trouvé que l'arrondi à l'entier de $\dfrac{1}{26-1}[F(26) - F(1)]$ est 202.

$\dfrac{1}{26-1}[F(26) - F(1)] = \dfrac{1}{26-1}\displaystyle\int_1^{26} f(t)\,\mathrm{d}t$ est la valeur moyenne de la fonction f entre 1 et 26 ; donc le nombre moyen de malades comptabilisés entre les semaines 1 et 26 est de 202 milliers.

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

On étudie l'évolution de la population d'une ville, depuis le 1er janvier 2008.

Partie A : un premier modèle

Pour cette partie, on admet que la population augmente de 3,5 % par an depuis le 1er janvier 2008.

1. Une augmentation annuelle de 3,5 % correspond à une multiplication par $1+\dfrac{3,5}{100}$ soit 1,035.

Si cette augmentation se produit pendant 6 ans, il faut multiplier par $1,035^6 \approx 1,229$, ce qui correspond à une augmentation de 22,9 %.

2. À partir de 2008, on modélise la population de cette ville au 1er janvier à l'aide d'une suite : pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants, exprimé en centaines de milliers d'habitants, au 1er janvier de l'année $2008+n$.

a. Au 1er janvier 2008, donc pour $n=0$, la population de la ville était de 100 000 habitants donc une centaine de milliers d'habitants : $u_0=1$.

b. La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison $q=1,035$; donc pour tout n, $u_n=u_0\times q^n=1\times 1,035^n=1,035^n$.

c. La population aura doublé quand elle aura atteint 2 centaines de milliers d'habitants, autrement dit quand u_n sera supérieur ou égal à 2. On résout l'inéquation $1,035^n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} 1,035^n \geqslant 2 &\iff \ln\left(1,035^n\right) \geqslant \ln 2 && \text{croissance de la fonction ln}\\ &\iff n\times \ln 1,035 \geqslant \ln 2 && \text{propriété de la fonction ln}\\ &\iff n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln 1,035} && \text{car } \ln 1,035 > 0 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln 2}{\ln 1,035}\approx 20,15$ donc on peut dire que le population aura doublé la 21e année, soit en $2008+21=2029$.

À la calculatrice, on trouve que $1,035^{20}\approx 1,99<2$ *et que* $1,03^{21}\approx 2,06>2$.

Partie B : un second modèle

On modélise la population de cette ville à partir du 1er janvier 2008 par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3}{1+2\,\mathrm{e}^{-0,05x}}$

Dans l'algorithme proposé dans le texte

- X désigne une variable entière qui représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2008 ;
- $f(X)$ représente le nombre d'habitants en centaines de milliers.

L'algorithme tourne tant que $f(X)\leqslant 2$, donc il s'arrête dès que $f(X)>2$; la valeur 28 affichée en sortie de l'algorithme représente donc la première année pour laquelle $f(X)$ est plus grand que 2, autrement dit la première année pour laquelle la population dépasse 200 000 habitants.
Ce sera en $2008+28$ donc en 2036 avec ce modèle de développement de population.