Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie 2 mars 2015

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1{,}5\,;\,6]$ par : $f(x) = (25x - 32)\,\mathrm{e}^{-x}$
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.
On donne $f'(x) = (57 - 25x)\,\mathrm{e}^{-x}$ et $f''(x) = (25x - 82)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. **a.** On sait que $f'(x) = (57 - 25x)\,\mathrm{e}^{-x}$ et que $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x ; donc $f'(x)$ est du signe de $57 - 25x$:

x	$1{,}5$		$\frac{57}{25}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

b. $f(1{,}5) = 5{,}5\,\mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 1{,}23$; $f\left(\frac{57}{25}\right) = 25\,\mathrm{e}^{-\frac{57}{25}} \approx 2{,}56$ et $f(6) = 118\,\mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}29$
D'où le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1{,}5\,;6]$:

x	$1{,}5$		$\frac{57}{25}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$1{,}23$	↗	$2{,}56$	↘	$0{,}29$

2. Un point d'inflexion est un point où la courbe représentant la fonction traverse sa tangente ; la courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse x_0 si et seulement si la dérivée seconde de la fonction s'annule et change de signe en x_0.
On sait que $f''(x) = (25x - 82)\,\mathrm{e}^{-x}$. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $25x - 82$ qui s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{82}{25}$.
Sur l'intervalle $[1{,}5\,;6]$, la courbe C admet donc un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{82}{25}$.

3. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $f(x) = 1$.

a. On complète le tableau de variation de la fonction f :

x	$1{,}5$		$\frac{57}{25}$		α		6
$f(x)$	$1{,}23$	↗	$2{,}56$	↘	1	↘	$0{,}29$

D'après le tableau de variation de f, on peut dire que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1{,}5\,;6]$ et que α apprtient à l'intervalle $\left[\frac{57}{25}\,;6\right]$.
Or $f(4) \approx 1{,}25 > 1$ et $f(5) \approx 0{,}63 < 1$, donc $4 < \alpha < 5$.
L'équation $f(x) = 1$ admet donc une solution unique α sur l'intervalle $[4\,;5]$.

b. On a écrit l'algorithme suivant permettant de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[4\,;5]$:

Initialisation
a prend la valeur 4
b prend la valeur 5
Traitement
Tant que $b - a > 0,1$ faire
  y prend la valeur $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
  Si $y > 1$ alors
    a prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
  Sinon b prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
Fin de Tant que
Sortie
Afficher $\frac{a+b}{2}$

Il s'agit d'une recherche de valeurs approchées de solutions d'équation par dichotomie.

On exécute l'algorithme et on complète le tableau :

	$\dfrac{a+b}{2}$	y à 10^{-3} près	a	b	$b-a$	Sortie
Initialisation			4	5	1	
1re boucle « Tant que »	4,5	0,894	4	4,5	0,5	
2e boucle « Tant que »	4,25	1,059	4,25	4,5	0,25	Non
3e boucle « Tant que »	4,375	0,974	4,25	4,375	0,125	Non
4e boucle « Tant que »	4,3125	1,016	4,3125	4,375	0,0625	Oui

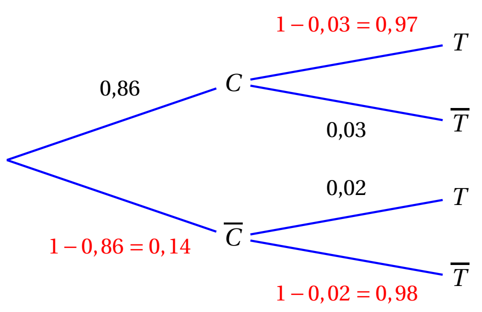
c. D'après les calculs précédents :
$f(4,3125) \approx 1,016 > 1$ et $f(4,375) \approx 0,974 < 1$ donc $4,3125 < \alpha < 4,375$.
On peut donc dire que $4,3$ est une valeur approchée de α au dixième.
Le solveur d'une calculatrice donne $4,336$ *comme valeur approchée de* α.

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A : sélection des pommes

On peut représenter la situation décrite dans le texte par un arbre pondéré :



1. L'événement « la pomme prélevée est conforme et est acceptée par la machine » correspond à l'événement $C \cap T$.
D'après l'arbre pondéré : $P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T) = 0,86 \times 0,97 = 0,8342$
2. D'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(C \cap T) + P\left(C \cap \overline{T}\right) = 0,86 \times 0,97 + 0,14 \times 0,02 = 0,8342 + 0,0028 = 0,837$

3. Une pomme prélevée est acceptée par la machine. L'événement « la pomme est conforme sachant qu'elle est acceptée par la machine » est l'événement $P_T(C)$.

$P_T(C) = \dfrac{P(C \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}8342}{0{,}837} \approx 0{,}997$

Partie B : contrôle d'un fournisseur

On formule l'hypothèse que 86 % des pommes de ce fournisseur sont conformes donc $p = 0{,}86$.

1. Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95% de la fréquence des pommes conformes dans un échantillon de taille 80 est :

$$I = \left[0{,}86 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}86(1-0{,}86)}}{\sqrt{80}} \,;\, 0{,}86 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}86(1-0{,}86)}}{\sqrt{80}}\right] \approx [0{,}783\,;\,0{,}937]$$

2. L'entreprise a constaté que seulement 65 pommes de l'échantillon étaient conformes.

La fréquence observée de pommes conformes est donc $f = \dfrac{65}{80} = 0{,}8125$.

Cette fréquence appartient à l'intervalle I donc il n'y a pas lieu, au vu de l'échantillon étudié, de remettre en cause l'hypothèse selon laquelle 86 % des pommes sont conformes.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Soit g la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,5]$ par : $g(x) = \dfrac{2\ln(x)+1}{x}$.

On note g' sa fonction dérivée et Γ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.

Soit B le point de Γ d'abscisse 1 ; la droite (OB) est tangente en B à la courbe Γ.

1. Le point A d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des abscisses a pour ordonnée 0 ; son abscisse est solution de l'équation $g(x) = 0$. On résout sur $[0{,}5\,;\,5]$ l'équation $g(x) = 0$:

$g(x) = 0 \iff \dfrac{2\ln(x)+1}{x} = 0 \iff 2\ln(x)+1 = 0 \iff \ln(x) = -\dfrac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

De plus $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \in [0{,}5\,;\,5]$. Les coordonnées de A sont donc $\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,;\,0\right)$.

2. a. On calcule la dérivée de la fonction g sur $[0{,}5\,;\,5]$:

$$g'(x) = \frac{\frac{2}{x}\times x - (2\ln(x)+1)\times 1}{x^2} = \frac{2-2\ln(x)-1}{x^2} = \frac{1-2\ln(x)}{x^2}$$

b. Sur $[0{,}5\,;\,5]$ $x^2 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $1-2\ln(x)$:

$1 - 2\ln(x) > 0 \iff \dfrac{1}{2} > \ln(x) \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} > x$ donc

$g'(x) > 0$ sur $\left[0{,}5\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, $g'\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 0$ et $g'(x) < 0$ sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,5\right]$

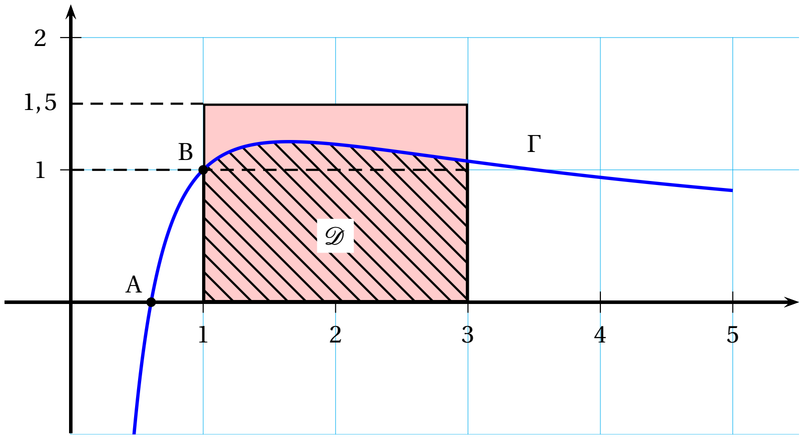
c. On peut en déduire les variations de la fonction g sur $[0{,}5\,;\,5]$:

- la fonction g est strictement croissante sur $\left[0{,}5\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$,
- elle admet un maximum en $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et
- elle est strictement décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,5\right]$

3. Il est dit dans le texte que la droite (OB) est tangente en B à la courbe Γ ; la droite (OB) passe par le point O et le point B d'abscisse 1 et d'ordonnée $g(1) = 1$. Donc son équation est $y = x$.

La tangente à la courbe Γ en B a pour équation $y = x$.

4. a. On note $\mathscr{D}$ le domaine défini par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.



Par lecture graphique, on peut voir que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est comprise entre 2 et 3 unités d'aire.

b. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $[0,5\,;\,5]$ par $G(x) = \ln(x)\,[\ln(x)+1]$.

$G'(x) = \dfrac{1}{x}\,[\ln(x)+1] + \ln(x) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln(x)+1}{x} = g(x)$ donc G est une primitive de g sur $[0,5\,;\,5]$.

c. La fonction g est dérivable et strictement positive sur $[1\,;\,3]$ donc l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale à

$\displaystyle\int_1^3 g(t)\,\mathrm{d}t = G(3) - G(1) = \ln(3)\,(\ln(3)+1) - \ln(1)\,(\ln(1)+2) = \ln(3)^2 + \ln(3)$ unités d'aire.

EXERCICE 4 — 5 points

Enseignement obligatoire

Dans une grande entreprise, les commerciaux ont le choix de services de téléphonie mobile exclusivement entre deux opérateurs concurrents : A et B.

1. On sait que 18 % des abonnés à l'opérateur A changent d'abonnement en fin d'année, donc il en reste 82 %.

On sait que 22 % des abonnés de l'opérateur B passent chez A l'année suivante.

Donc le nombre u_{n+1} d'abonnés à l'opérateur A l'année $n+1$ est constitué des 82 % des abonnés de l'opérateur A l'année n, ce qui fait $0,82u_n$, et des 22 % d'abonnés de l'opérateur B qui passent chez A, ce qui fait $0,22v_n$.

Donc $u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22v_n$

De plus, comme les commerciaux sont abonnés exclusivement chez les opérateurs A et B on peut dire que $u_n + v_n = 1$.

2. $\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22v_n \\ u_n + v_n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22\,(1-u_n) = 0,82u_n + 0,22 - 0,22u_n = 0,6u_n + 0,22$

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout n par $w_n = u_n - 0,55$; donc $u_n = w_n + 0,55$.

a. Pour tout n :
$$\begin{array}{rclcl} w_{n+1} &=& u_{n+1} - 0,55 &=& 0,6u_n + 0,22 - 0,55 \\ &=& 0,6\,(w_n + 0,55) - 0,33 &=& 0,6w_n + 0,33 - 0,33 \\ &=& 0,6w_n && \end{array}$$

$w_0 = u_0 - 0,55 = 0,4 - 0,55 = -0,15$; on peut donc dire que

la suite (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = -0,15$ et de raison $q = 0,6$.

b. La suite (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = -0,15$ et de raison $q = 0,6$ donc, pour tout n : $w_n = w_0 \times q^n = -0,15 \times (0,6)^n$.

c. Pour tout n, $u_n = w_n + 0,55$ et $w_n = -0,15 \times (0,6)^n$, donc $u_n = 0,55 - 0,15 \times (0,6)^n$.

4. En calculant $u_{10} \approx 0,549$, $u_{20} \approx 0,54999$ et $u_{30} \approx 0,54999997$, on peut conjecturer que la suite (u_n) a pour limite $0,55$.

C'est un résultat du cours : une suite géométrique ayant une raison q telle que $0 \leqslant q < 1$, a pour limite 0. Donc la suite (w_n) a pour limite 0 et donc la suite (u_n) a pour limite 0,55.

Le terme u_n désigne la proportion de commerciaux qui disposent d'un abonnement chez l'opérateur A ; cette proportion va donc tendre vers 55 %.

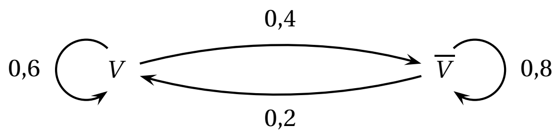
EXERCICE 4 **5 points**

Enseignement de spécialité

Une société est spécialisée dans la vente en ligne de produits de haute technologie sur internet.

Partie A

1. On représente la situation décrite dans le texte par un graphe probabiliste de sommets V et $\overline{V}$:



2. D'après le texte on peut dire que $\left\{\begin{array}{l c l} x_{n+1} & = & 0,6x_n + 0,2y_n \\ y_{n+1} & = & 0,4x_n + 0,8y_n \end{array}\right.$

   ce qui équivaut à : $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

   La matrice de transition est donc $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

3. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$ donc

   $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 0,05 \times 0,6 + 0,95 \times 0,2 & 0,05 \times 0,4 + 0,95 \times 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \end{pmatrix}$

4. On admet que le taux de visites se stabilise à long terme.

   Soit S la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; elle peut correspondre à un état du système car $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

   $S \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 0,6 + \frac{2}{3} \times 0,2 & \frac{1}{3} \times 0,4 + \frac{2}{3} \times 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0,6}{3} + \frac{0,4}{3} & \frac{0,4}{3} + \frac{1,6}{3} \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

   Donc $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est un état stable du système.

Partie B

1. On veut parcourir le réseau proposé dans cette partie en empruntant chaque arête une et une seule fois ; autrement dit on cherche une chaîne eulérienne dans ce graphe.

   On note les degrés de chaque sommet :

A	B	C	D	E	F	G	H	I
4	3	4	2	4	6	4	3	2

   Il y a exactement deux sommets de degrés impairs dans ce graphe, B et H, donc on peut réaliser des parcours empruntant chaque fibre optique une fois et une seule, partant du routeur B pour se terminer au routeur H, ou partant du routeur H pour se terminer au routeur B.

2. On va chercher, au moyen de l'algorithme de Dijkstra le parcours le plus court reliant A à I :

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	30 (A)	30 (A)	**20 (A)**	∞	50 (A)	∞	∞	∞	D
	30 (A)	30 (A)		∞	50 (A) ~~60 (B)~~	∞	∞	∞	B
		30 (A) ~~50 (B)~~		40 (B)	50 (A)	∞	∞	∞	C
				40 (B) ~~70 (C)~~	50 (A) ~~70 (C)~~	∞	∞	∞	E
					50 (A) ~~80 (E)~~	80 (E)	∞	∞	F
						~~80 (E)~~ **60 (F)**	80 (F)	∞	G
							80 (F) ~~90 (G)~~	**70 (G)**	I

Le chemin le plus court pour relier A à I est : A $\xrightarrow{50}$ F $\xrightarrow{10}$ G $\xrightarrow{10}$ I

Donc le paquet de données qui a mis 70 ms pour transiter du routeur A au routeur I a emprunté le chemin le plus rapide.