


Corrigé du baccalauréat ES Pondichéry

16 avril 2015

Exercice 1

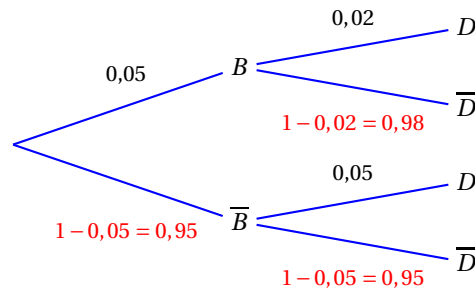
5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

- On appelle
- B l'événement « la batterie est défectueuse » ;
 - D l'événement « le disque dur est défectueux ».

On représente la situation décrite dans le texte par un arbre pondéré :



Proposition 1 – Fausse

La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est égale à 0,08 à 0,01 près.

L'événement « le micro n'a ni problème de batterie ni problème de disque dur » est $\overline{B} \cap \overline{D}$.

D'après l'arbre : $P(\overline{B} \cap \overline{D}) = P(\overline{B}) \times P(\overline{D}) = 0,95 \times 0,95 = 0,9025 \neq 0,08$

Proposition 2 – Vraie

La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à 0,0485.

On cherche $P(D)$. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(B \cap D) + P(\overline{B} \cap D) = 0,05 \times 0,02 + 0,95 \times 0,05 = 0,0010 + 0,0475 = 0,0485$$

Proposition 3 – Fausse

Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est inférieure à 0,02.

On cherche $P_D(B)$: $P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,05 \times 0,02}{0,0485} \approx 0,0206 > 0,02$

Partie B

Proposition 4 – Vraie

La probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 h est inférieure à 0,2.

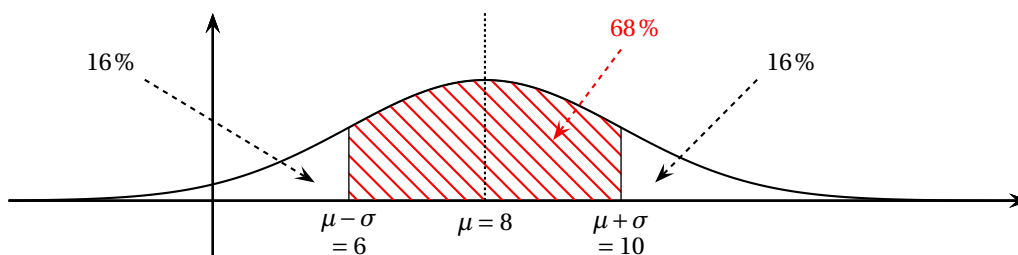
La variable aléatoire X qui donne l'autonomie de la batterie suit la loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart type $\sigma = 2$. On cherche $P(X \geq 10)$.

$\mu = 8$ et $\sigma = 2$ donc $10 = \mu + \sigma$.

D'après le cours, on sait que $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$ et pour des raisons de symétrie par rapport à la

droite d'équation $x = \mu$, on peut déduire que $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma) \approx \frac{1 - 0,68}{2} \approx 0,16$.

Donc $P(X \geq 10) \approx 0,16 < 0,2$.



Partie C

Proposition 5 – Fausse

Ce test, réalisé sur ces 1 000 clés, ne remet pas en cause la communication de l'entreprise.

Pour une proportion p et un échantillon de taille n , l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a $p = 0,98$ et $n = 1\,000$.

Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95% donnant le pourcentage de clés USB conformes dans un échantillon de taille 1 000 est :

$$I = \left[0,98 - 1,96 \frac{\sqrt{0,98(1-0,98)}}{\sqrt{1\,000}} ; 0,98 + 1,96 \frac{\sqrt{0,98(1-0,98)}}{\sqrt{1\,000}} \right] \approx [0,97 ; 0,99]$$

Sur 1 000 clés, il y en a 50 de défectueuses donc la fréquence de clés conformes dans ce lot est $f = \frac{1\,000 - 50}{1\,000} = 0,95$. Or $f \notin I$, donc il faut remettre en question la communication de l'entreprise.

Exercice 2

5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

1. a. On recopie et on complète le tableau correspondant à l'algorithme donné dans le texte :

Test $C < 400$		vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de C	300	326	350	372	392	411	
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	

- b. La valeur affichée en sortie d'algorithme est 5. Cela veut dire que pour l'année 5, c'est-à-dire en 2019, le nombre de colonies dépasse pour la première fois 400.
2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année 2014 + n .

Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

- a. D'une année sur l'autre, l'apiculteur perd 8 % de colonies donc il en reste 92 %. De plus, il installe 50 nouvelles colonies chaque printemps donc le nombre de colonies l'année $n + 1$ est le nombre de colonies l'année n multiplié par 0,92 auquel on va ajouter 50 :
pour tout n , $C_{n+1} = 0,92 \times C_n + 50$
- b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = 625 - C_n$; donc $C_n = 625 - V_n$.
 $V_{n+1} = 625 - C_{n+1} = 625 - 0,92 \times C_n - 50 = 575 - 0,92 \times (625 - V_n) = 575 - 575 + 0,92 \times V_n = 0,92 \times V_n$
- c. D'après la question précédente, on peut déduire que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $V_0 = 625 - C_0 = 325$.
Donc, pour tout n , $V_n = V_0 \times q^n = 325 \times 0,92^n$.
Comme $C_n = 625 - V_n$, on peut dire que, pour tout n , $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.
- d. Le mois de juillet 2024 correspond à $n = 10$; l'apiculteur peut espérer posséder C_{10} colonies soit : $C_{10} = 625 - 325 \times 0,92^{10} \approx 484$ colonies.
3. a. Pour doubler le nombre initial de colonies, il faut atteindre au moins 600 colonies ; il suffit donc de remplacer dans l'algorithme la ligne « **Tant que $C < 400$ faire** » par la ligne « **Tant que $C < 600$ faire** ».
- b. On cherche une valeur de n pour laquelle $C_n \geq 600$:

$$C_n \geq 600 \iff 625 - 325 \times 0,92^n \geq 600 \iff 25 \geq 325 \times 0,92^n \iff \frac{25}{325} \geq 0,92^n$$

$$\iff \ln\left(\frac{25}{325}\right) \geq \ln(0,92^n) \iff \ln\left(\frac{25}{325}\right) \geq n \times \ln(0,92) \iff \frac{\ln\left(\frac{25}{325}\right)}{\ln(0,92)} \leq n$$

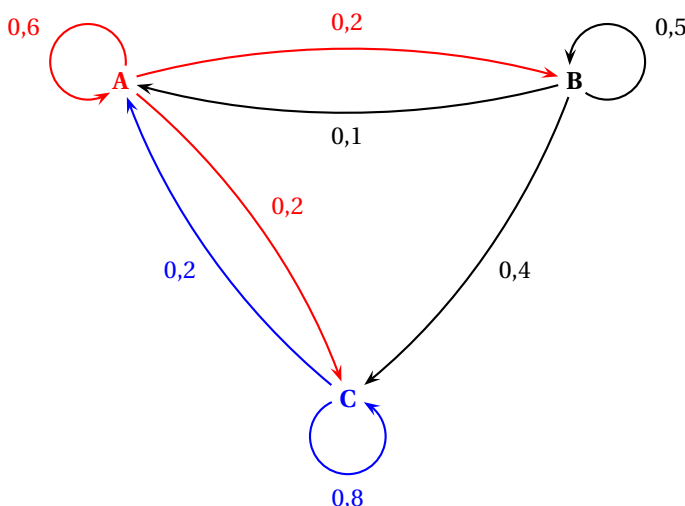
Or $\frac{\ln\left(\frac{25}{325}\right)}{\ln(0,92)} \approx 30,8$ donc au bout de 31 années, le nombre de colonies aura doublé.
 Vérification : $C_{30} \approx 598$ et $C_{31} \approx 600$

Exercice 2

5 points

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On représente la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets A, B et C :



2. Si a_n, b_n et c_n sont respectivement les nombres de visiteurs sur les sites A, B et C à l'instant $t = n$, d'après le graphe, on aura :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,6a_n + 0,1b_n + 0,2c_n \\ b_{n+1} = 0,2a_n + 0,5b_n + 0c_n \\ c_{n+1} = 0,2a_n + 0,4b_n + 0,8c_n \end{cases} \iff (a_{n+1} \quad b_{n+1} \quad c_{n+1}) = (a_n \quad b_n \quad c_n) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de transition associée à ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$

On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix}$ et $M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}$.

3. $N_2 = N_1 \times M = N_0 \times M \times M = N_0 \times M^2 = (100 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} = (42 \quad 22 \quad 36)$

On peut donc dire que, lors de la deuxième minute, il y a 42 internautes sur le site A, 22 sur le site B et 36 sur le site C.

4. $N_0 \times M^{20} = N_{20} \approx (100 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix} = (31,25 \quad 12,5 \quad 56,25)$

On peut conjecturer que l'état stable est $(31,25 \quad 12,5 \quad 56,25)$.

Ce que l'on peut vérifier simplement car $(31,25 \quad 12,5 \quad 56,25) \times M = (31,25 \quad 12,5 \quad 56,25)$.

À long terme, il y aura en moyenne 31,25 internautes connectés sur le site A, 12,5 sur le site B et 56,25 sur le site C.

5. À l'instant $t = 0$, le site C est infecté.

a. La probabilité de passer du site C au site A en une minute est de 0,2 ; la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté est donc égale à 0,2.

- b. Pour qu'en deux minutes les trois sites soient infectés, il faut aller de C vers A puis vers B, ou de C vers B puis vers A.
 C'est impossible d'aller de C vers B.
 On va de C vers A avec une probabilité de 0,2 et de A vers B avec une probabilité de 0,2 ; on va donc de C vers A puis vers B avec une probabilité de $0,2 \times 0,2 = 0,04$.
 La probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés est donc égale à 0,04.

Exercice 3

4 points

Commun à tous les candidats

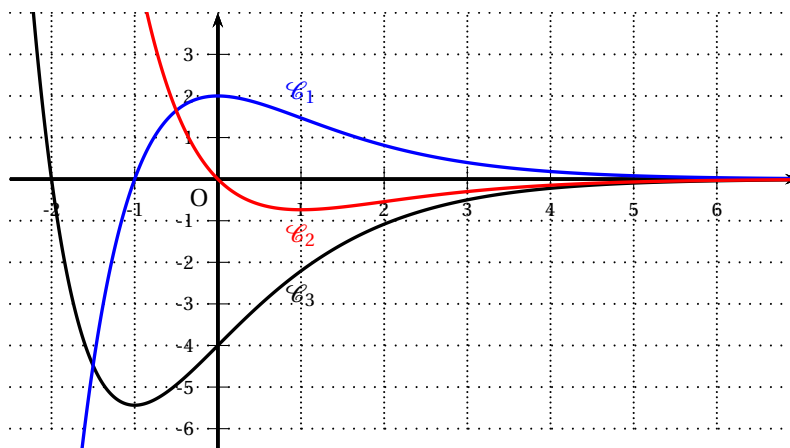
On s'intéresse à la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2(x+2)e^{-x}$

Partie A

1. $f(-1) = -2(-1+2)e^{-(-1)} = -2e \approx -5,44$
2. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} :
 $f'(x) = -2(1)e^{-x} - 2(x+2)(-1)e^{-x} = (-2+2x+4)e^{-x} = 2(x+1)e^{-x}$
3. Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x+1$ sur \mathbb{R} .
 - Si $x < -1$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $] -\infty; -1[$;
 - Si $x > -1$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$;
 - $f'(-1) = 0$ et f admet un minimum en -1 égal à $f(-1) = -2e$.

Partie B

Dans le repère orthogonal ci-dessous, trois courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_3 ont été représentées. L'une de ces courbes représente la fonction f , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.



On sait que sur un intervalle : f convexe $\iff f'$ croissante $\iff f''$ positive
 Il faut donc déterminer quelle fonction correspond à chacune des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_3 .

- La seule courbe qui corresponde aux variations de la fonction f est \mathcal{C}_3 .
- La courbe \mathcal{C}_1 correspond à une fonction négative sur $] -\infty; -1[$ et positive sur $]-1; +\infty[$; c'est donc la courbe représentative de la fonction f' car la fonction f est décroissante sur $] -\infty; -1[$ et croissante sur $]-1; +\infty[$.
- La courbe \mathcal{C}_2 est donc la représentation graphique de la fonction f'' .

Pour déterminer la convexité de la fonction f , il suffit de regarder le signe de la fonction f'' : $f'' > 0$ sur l'intervalle $] -\infty; 0[$ donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $] -\infty; 0[$.

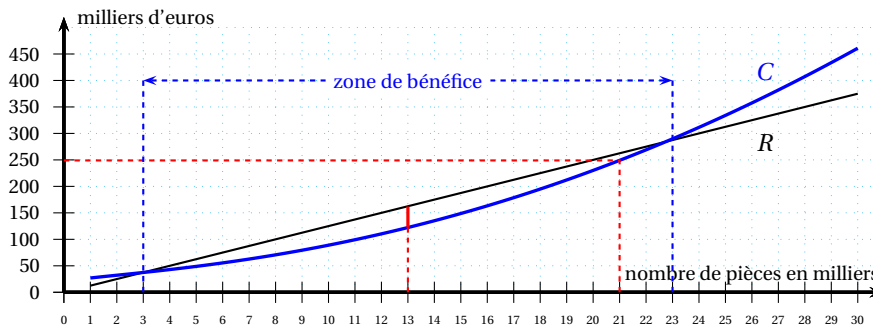
Exercice 4

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle $[1; 30]$.



- On trouve le coût de production de 21 000 pièces en cherchant l'image du nombre 21 par la fonction C : le coût de production de 21 000 pièces est à peu près de 250 000 euros.
- L'entreprise réalise un bénéfice quand la recette est supérieure au coût de production, c'est-à-dire quand la fonction R est située au dessus de la fonction C : l'entreprise réalise un bénéfice pour une quantité de pièces produites comprise entre 3 000 et 23 000.
- L'entreprise réalise un bénéfice maximal quand, sur l'intervalle $[3; 23]$, l'écart entre la fonction R et la fonction C est le plus grand; c'est autour de 13 donc le bénéfice est maximal pour une production de 13 000 pièces.

Partie B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1; 30]$ par $B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + 2x \ln x$.

- La fonction B est dérivable sur $[1; 30]$ et

$$B'(x) = -0,5(2x) + 6 + 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} = -x + 6 + 2 \ln x + 2 = -x + 8 + 2 \ln x$$
- On admet que $B''(x) = -1 + \frac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1; 30]$.
 On donne le tableau de variations de la fonction dérivée B' :

x	1	2	30
$B'(x)$	7	$6 + 2 \ln 2$	$-22 + 2 \ln 30$

$B'(1) = -1 + 8 = 7$; $B'(2) = -2 + 8 + 2 \ln 2 = 6 + 2 \ln 2 \approx 7,4 > 0$;
 $B'(30) = -30 + 8 + 2 \ln 30 = -22 + 2 \ln 30 \approx -15,2 < 0$

- Sur $[1; 2[$: $1 \leq x < 2 \iff \frac{1}{2} < \frac{1}{x} \leq 1 \iff 1 < \frac{2}{x} \leq 2 \iff 0 < -1 + \frac{2}{x} \leq 1 \implies B''(x) > 0$ donc B' est strictement croissante.
- Sur $]2; 30]$: $2 < x \leq 30 \iff \frac{1}{30} \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \iff \frac{2}{30} \leq \frac{2}{x} < 1 \iff -1 + \frac{2}{x} \leq -1 + \frac{2}{30} < 0 \implies B''(x) < 0$ donc B' est strictement décroissante.
- En $x = 2$, $B''(x) = 0$; la fonction B'' s'annule et change de signe donc la fonction B' admet un maximum égal à $B'(2) = 6 + 2 \ln 2$.

3. a. On a vu que $B'(1) > 0$, $B'(2) > 0$ et $B'(30) < 0$; on complète le tableau de variations de B' :

x	1	2	α	30
$B'(x)$		$6 + 2\ln 2$	0	$-22 + 2\ln 30$
	7			

On peut en déduire que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 30]$, et que cette solution est dans l'intervalle $]2 ; 30[$.

b. En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, on trouve successivement :

- $B'(13) \approx 0,13 > 0$
• $B'(14) \approx -0,72 < 0$ } $\Rightarrow \alpha \in [13; 14]$
- $B'(13,1) \approx 0,045 > 0$
• $B'(13,2) \approx -0,04 < 0$ } $\Rightarrow \alpha \in [13,1; 13,2]$
- $B'(13,15) \approx 0,003 > 0$
• $B'(13,16) \approx -0,006 < 0$ } $\Rightarrow \alpha \in [13,15; 13,16]$
- $B'(13,153) \approx 0,0003 > 0$
• $B'(13,154) \approx -0,0005 < 0$ } $\Rightarrow \alpha \in [13,153; 13,154]$

Donc 13,153 est une valeur approchée de α au millième.

On peut également utiliser le solveur de la calculatrice.

4. On peut déduire des questions précédentes que :

- $B'(x) > 0$ sur $[1; \alpha[$
- $B'(x) < 0$ sur $] \alpha; 30]$
- $B'(\alpha) = 0$

$B(1) = -0,5 + 6 - 20 + 2\ln 1 = -14,5$; $B(30) = -0,5 \times 30^2 + 6 \times 30 - 20 + 2 \times 30 \times \ln 30 = -290 + 60\ln 30$

D'où le tableau de variations de la fonction B :

x	1	α	30
$B'(x)$		0	
		+	-
$B(x)$		$B(\alpha)$	
	$-14,5$		$-290 + 60 \ln 30$

5. L'entreprise réalise un bénéfice maximal quand $x = \alpha$ ce qui correspond à une production de 13 153 pièces, à l'unité près.

Ce bénéfice maximal vaut $B(\alpha)$.

Or $\alpha \in [13,153; 13,154]$ et $B(13,153) \approx 40,20$ et $B(13,154) \approx 40,20$ milliers d'euros.

On peut donc dire que le bénéfice maximal, arrondi au millier d'euros, est de 40 000 €.