Correction ES, Liban, T ES – L

27 mai 2015 3 heures

Exercice 1 5 points

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.

x	-3	-1	0	α	1
Variations de f	-6 ↗	-1 ↘	-2 ↗	0 ↗	4

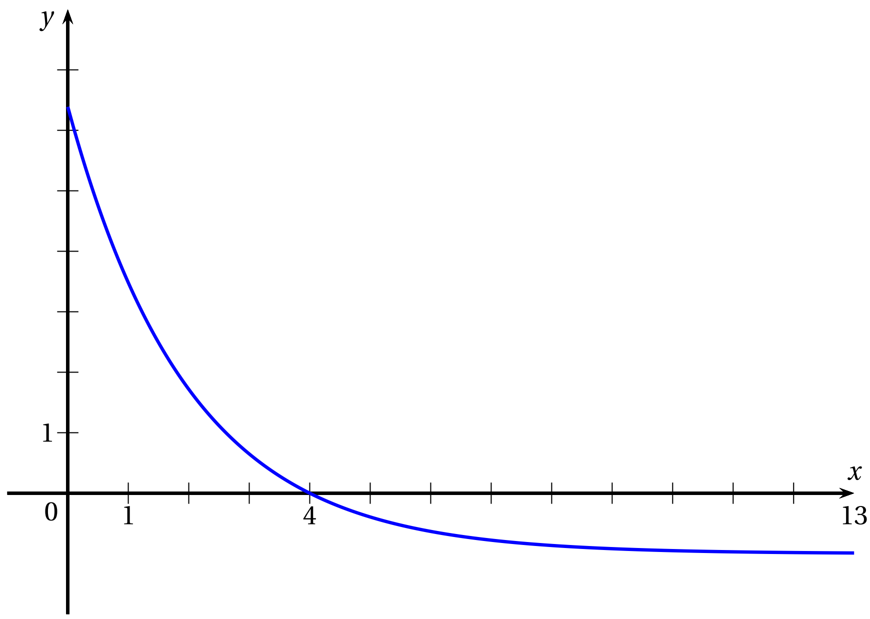
Proposition 1 : VRAIE L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.

Sur l'intervalle $[-3; 0]$, on a : $-6 \leqslant f(x) \leqslant -1$, or 0 n'appartient pas à l'intervalle $[-6; -1]$, donc $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-3; 0]$.

Sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction f est continue et strictement croissante de $[0; 1]$ vers $[-2; 4]$.

Or $0 \in [-2; 4]$, 0 possède donc un unique antécédent α dans l'intervalle $[0; 1] \subset [-3; 1]$.

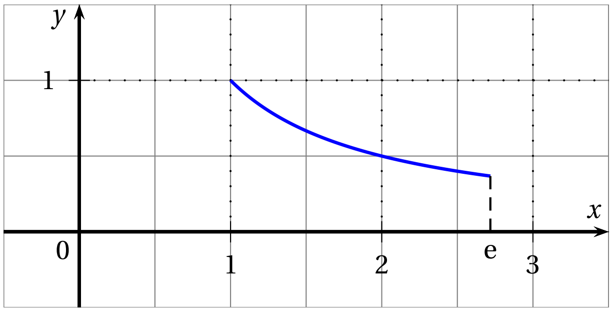
2. On considère une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 13]$ et on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction g', fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ 13]$.



Proposition 2 : FAUSSE La fonction g est strictement **croissante** sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, car sa dérivée est positive sur cet intervalle, sa représentation graphique se situant au dessus de l'axe des abscisses.

Proposition 3 : VRAIE La fonction g est concave sur l'intervalle $[0\ ;\ 13]$, car sa fonction dérivée est décroissante sur cet intervalle.

3. La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction h définie sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.



Proposition 4 : VRAIE La fonction h est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, car :

$$h \text{ est continue et positive sur } [1\,;\,\mathrm{e}] \quad \text{et} \quad \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\mathrm{e}} = \ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1$$

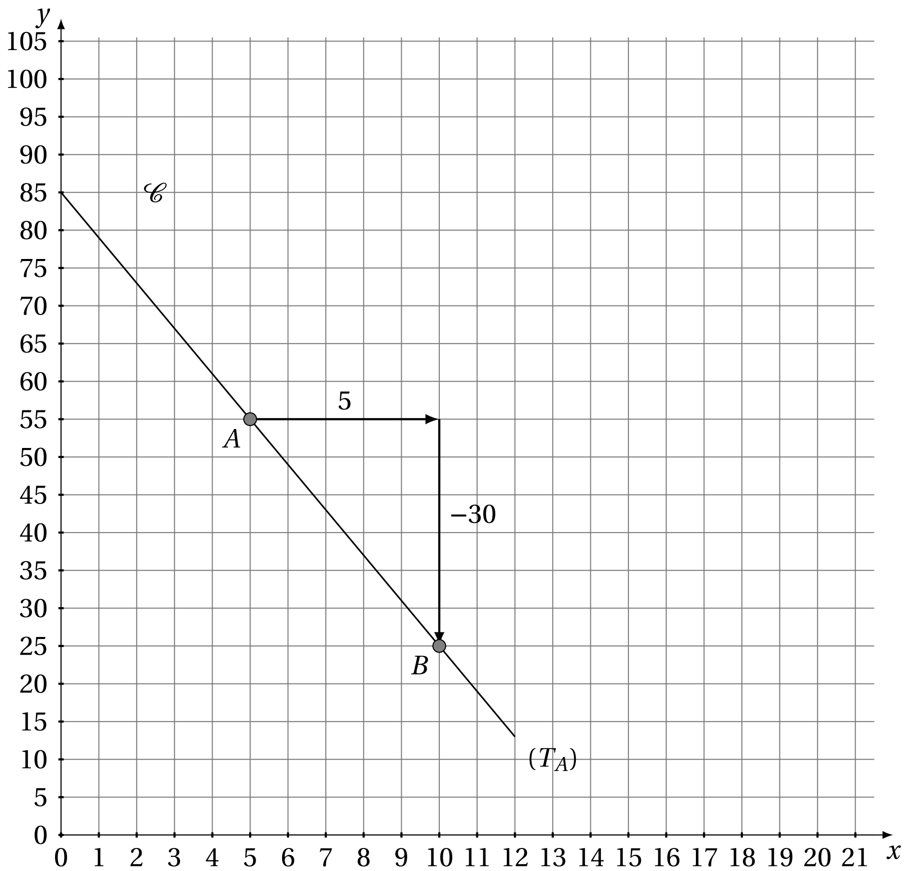
Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise artisanale produit des parasols. Elle en fabrique entre 1 et 18 par jour. Le coût de fabrication unitaire est modélisé par une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,18]$.

On note x le nombre de parasols produits par jour et $f(x)$ le coût de fabrication unitaire exprimé en euros.

Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la tangente (T_A) au point $A(5\,;\,55)$. Le point $B(10\,;\,25)$ appartient à la tangente (T_A).



On admet que $f(x) = 2x + 5 + 40\mathrm{e}^{-0,2x+1}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;18]$

1. a) Pour aller de A à B, on avance de 5 et on descend de 30. Le vecteur directeur de la droite (AB) (tangente à $\mathscr{C}$ en A) est $\overrightarrow{u} : \binom{5}{-30} = 5\binom{1}{-6}$.
   Le cœfficient directeur de la tangente est donc : $f'(5) = -6$.

   b) Dérivée $f'(x)$, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 18]$:

$$f'(x) = 2 + 40 \times \underbrace{(-0,2)}_{u'} \times \mathrm{e}^{\overbrace{-0,2x+1}^{u}} = 2 - 8\mathrm{e}^{-0,2x+1} = 2\left(1 - 4\mathrm{e}^{-0,2x+1}\right)$$

   c) Cœfficient directeur de la tangente au point d'abscisse 5 :

$$f'(5) = 2\left(1 - 4\mathrm{e}^{-0,2\times(5)+1}\right) = 2\left(1 - 4\mathrm{e}^{0}\right) = 2(1-4) = -6$$

2. a)

$$f'(x) = 2 - 8\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geqslant 0 \Longleftrightarrow 2 \geqslant 8\mathrm{e}^{-0,2x+1} \Longleftrightarrow \frac{1}{4} \geqslant \mathrm{e}^{-0,2x+1}$$
$$\Longleftrightarrow \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 \geqslant -0,2x+1 \Longleftrightarrow -5\ln 4 \geqslant -x+5 \Longleftrightarrow x \geqslant 5+5\ln 4$$

   b) Signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur $[1\ ;\ 18]$:
   La dérivée $f'(x)$ est positive sur $[5+5\ln 4\,;\,18]$ et décroissante sur $[1\,;\,5+5\ln 4]$.

x	1		$5+5\ln 4$		18
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	96,02	$\searrow$	38,86	$\nearrow$	43,97

$$f(1) = 7 + \mathrm{e}^{0,8} \simeq 96,0216 \quad ; \quad f(5+5\ln 4) \simeq 38,8629 \quad ; \quad f(18) \simeq 43,9709$$

3. Nombre de parasols que doit produire l'entreprise pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal :
   Le coût minimum est atteint pour $x = 5 + 5\ln 4 \simeq 11,9315$. Il faut donc produire 12 parasols ; le coût unitaire minimum sera de $38,86$€.

4. a) $F(x) = x^2 + 5x - 200\mathrm{e}^{-0,2x+1}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[1\ ;\ 18]$:

$$F'(x) = 2x + 5 - 200 \times (-0,2) \times \mathrm{e}^{-0,2x+1} = 2x + 5 + 40\mathrm{e}^{-0,2x+1} = f(x)$$

   b) Valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 + 5x - 200\mathrm{e}^{-0,2x+1}\right]_5^{15} = (15^2 + 5\times 15 - 200\mathrm{e}^{-0,2\times 15+1}) - (5^2 + 5\times 5 - 200\mathrm{e}^{-0,2\times 5+1})$$
$$= (300 - 200\mathrm{e}^{-2}) - (50 - 200\mathrm{e}^{0}) = 450 - \frac{200}{\mathrm{e}^2}$$

   c) La valeur de $\frac{1}{10}I$ représente la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[5\,;\,15]$:

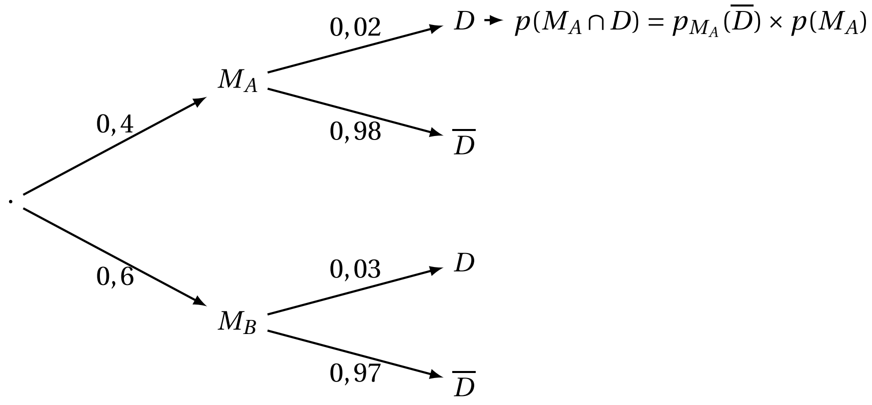
$$\frac{1}{10}I = \frac{1}{15-5} = \int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = 45 - \frac{20}{\mathrm{e}^2} \simeq 42,29$$

   C'est le coût de production unitaire moyen.

Exercice 3 — 6 points

Partie A

1. a) Arbre pondéré.



b) Probabilité qu'une médaille soit défectueuse :

$p(D) = p(D \cap M_A) + p(D \cap M_B) = p_{M_A}(D) \times p(M_A) + p_{M_B}(D) \times p(M_B) = 0,02 \times 0,4 + 0,03 \times 0,6 = 0,026$

c) Probabilité qu'une médaille soit produite par la machine M_A sachant qu'elle est défectueuse :

$$p_D(M_A) = \frac{p(M_A \cap D}{p(D)} = \frac{0,02 \times 0,4}{0,026} \simeq 0,3076 \simeq 0,308$$

2. Les médailles produites sont livrées par lots de 20. $\longrightarrow$ $\boldsymbol{n} = \mathbf{20}$.
On prélève au hasard un lot de 20 médailles dans la production.
On suppose que la production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. Les tirages sont supposés indépendants. $\longrightarrow$ **loi binomiale**.
On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de médailles défectueuses contenues dans ce lot. $\longrightarrow$ **succès** : D, **échec** : $\overline{D}$.

a) X suit une loi normale de paramètre $n = 20$, $p = 0,026$.

b) Probabilité qu'il y ait au plus une médaille défectueuse dans ce lot :

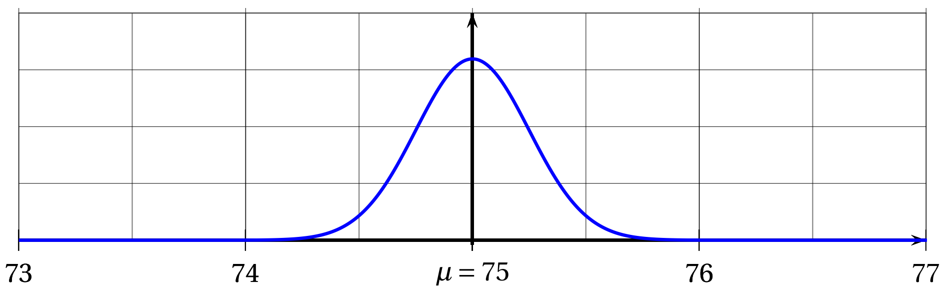
$$p(X \leqslant 1) = p(X=0) + p(X=1) = \binom{20}{0} 0,026^0 \times (1-0,026)^{20} + \binom{20}{1} 0,026^1 \times (1-0,026)^{19} \simeq 0,906.$$

Partie B

Le diamètre exprimé en millimètre, d'une médaille fabriquée par cette entreprise est conforme lorsqu'il appartient à l'intervalle $[74,4 ; 75,6]$.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque médaille prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre en millimètre. On suppose que la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 0,25$.

La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la densité de probabilité de Y.



1. Par lecture graphique, la valeur de μ est 75.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice la probabilité $P(74,4 \leqslant Y \leqslant 75,6)$:

$$p(74,4 \leqslant Y \leqslant 75,6) = p\left(\frac{74,4-75}{0,25} \leqslant \frac{X-75}{0,25} \leqslant \frac{75,6-75}{0,25}\right) = p(-2,4 \leqslant Z \leqslant 2,4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2,4}^{2,4} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \simeq 0,9836$$

3. Résultat du cours :

$$p(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \simeq 1-0,05 = 0,95$$

donc

$$P(75-h \leqslant Y \leqslant 75+h) = p\left(\frac{-h}{0,25} \leqslant \frac{Y-75}{0,25} = \leqslant \frac{h}{0,25}\right) = p(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \simeq 1-0,05 = 0,95$$

Ainsi

$$\frac{-h}{0,25} = -1,96 \Longleftrightarrow h = 0,49$$

Partie C

Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la machine M_B, on admet que la proportion des médailles ayant une épaisseur non conforme dans la production est de 3 %.

Pour contrôler le bon fonctionnement de la machine M_B, on a prélevé au hasard un échantillon de 180 médailles et on a constaté que 11 médailles ont une épaisseur non conforme.

1. Fréquence des médailles dont l'épaisseur n'est pas conforme : $f = \dfrac{11}{180} \simeq 0,061$. On a, d'après l'énoncé, $p = 0,03$.
2. Déterminer, en justifiant, si le résultat de la question précédente rend pertinente la prise de décision d'arrêter la production pour procéder au réglage de la machine M_B.

   $n = 180 \geqslant 30$, $np = 180 \times 0,03 = 5,4 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 180 \times 0,097 = 17,46 \geqslant 5$.

   Intervalle de fluctuation asymptotique associé à cette proportion au seuil de confiance de 95% :

$$I_a = \left[0,03 - 1,96\frac{\sqrt{0,03 \times 0,97}}{\sqrt{180}}\,;\,0,03 + 1,96\frac{\sqrt{0,03 \times 0,97}}{\sqrt{180}}\right] \simeq [0,0051\,;\,0,055]$$

   Comme $0,061 \notin I_a$, la décision d'arrêter la production pour procéder au réglage de la machine M_B est pertinente.

Exercice 4 — 5 points

La situation peut être modélisée par une suite (V_n).

Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 est $V_0 = 100000$.

Pour tout entier naturel n supérieur à 0, V_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n-ième jour qui suit le 1er juillet 2013.

1. a) Volume d'eau V_1 au matin du 2 juillet 2013 :

$$V_0 = 100000 \overbrace{\longrightarrow}^{-4\%} 0,96 \times 100000 = 96000 \overbrace{\longrightarrow}^{-500} 96000 - 500 = 95500 = V_1$$

   b) Volume d'eau V_2, au matin du 3 juillet 2013 :

$$V_1 = 95500 \overbrace{\longrightarrow}^{-4\%} 0,96 \times 95500 = 91680 \overbrace{\longrightarrow}^{-500} 91680 - 500 = 91180 = V_2$$

c) Pour tout entier naturel n

$$V_n \overset{-4\%}{\overbrace{\longrightarrow}} 0,96 \times V_n \overset{-500}{\overbrace{\longrightarrow}} 0,96V_n - 500 = V_{n+1}$$

Ainsi, $V_{n+1} = 0,96V_n - 500$.

2. Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	V est un nombre réel
L2		N est un entier naturel
L3	**Traitement :**	Affecter à V la valeur 100000
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $V > 0$
L6		Affecter à N la valeur $\boldsymbol{N+1}$
L7		Affecter à V la valeur $\mathbf{0,96 * \boldsymbol{V} - 500}$
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher $\boldsymbol{N}$

3. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = V_n + 12500 \iff V_n = U_n - 12500$.

a) La suite (U_n) est une suite géométrique de raison $0,96$:

$$U_{n+1} = V_{n+1} + 12500 = 0,96Vu_n - 500 + 12500 = 0,96Vu_n + 12000 = 0,96(Vu_n + 12500 = 0,96 \times U_n$$

$$U_0 = V_0 + 12500 = 100000 + 12500 = 112500$$

b) Ainsi : $U_n = 112500 \times (0,96)^n$.

c) Donc :

$$U_n = V_n + 12500 \iff V_n = U_n - 12500 = 112500 \times 0,96^n - 12500$$

4. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $112500 \times 0,96^n - 12500 \leqslant 0$:

$$\begin{aligned} 112500 \times 0,96^n - 12500 \leqslant 0 &\iff 112500 \times 0,96^n \leqslant 12500 \\ &\iff 0,96^n \leqslant \frac{12500}{112500} \simeq 0,111 \\ &\iff \ln\left(0,96^n\right) = n \ln 0,96 \leqslant \ln \frac{12500}{112500} \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln \frac{12500}{112500}}{\ln 0,96} \simeq 53.825 \end{aligned}$$

b) À la 54[e] année, c'est-à-dire en 2067, il n'y aura plus d'eau dans le bassin.