Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2015 - ES Liban

Série ES Obli. et Spé.
27 Mai 2015
Correction

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Exercice 1. Vrai/Faux — 4 points

Commun à tous les candidats

1. **Attention :** *Dans cette question, aucun renseignement n'est donné explicitement sur la continuité ou dérivabilité de la fonction f. Cependant, comme remarqué par beaucoup, le programme de ES est clair : « On convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré ».*
Notons qu'une fonction croissante peut très bien ne pas être continue partout. Par exemple, la fonction partie entière est croissante, et discontinue en tout point entier. Cependant, l'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable.
On suppose donc ici que f est continue sur son intervalle de définition.

x	-3		-1		0		α		1
Variations de f	-6	↗	-1	↘	-2	↗	0	↗	4

Proposition 1 (Vraie)

L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.

- **Sur l'intervalle $[-3\ ;\ 0]$** :
  Sur cet intervalle, le maximum de la fonction f est -1, atteint pour $x = -1$.
  De ce fait l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-3\ ;\ 0]$.

- **Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$:**

  Théorème 1 (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)

  Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
  alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

  Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche).

  – La fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$;
  – L'image par f de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ est $[-2\ ;\ 4]$ d'après le tableau de variations.
  – Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image car $-2 < k = 0 < 4$
  Donc, d'après le *corolaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
  l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0\ ;\ 1]$.

- **Pour conclure** : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur $[-3\ ;\ 1]$.

2. On donne la courbe représentative de la fonction g' sur [0 ; 13].

Proposition 2 (Fausse)

La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, la courbe représentative de la fonction g' est au-dessus de l'axe des abscisses donc g' est positive sur cet intervalle. de fait, la fonction$g$ est croissante sur $[0\ ;\ 4]$, la proposition 2 est fausse.

Proposition 3 (Vraie)

La fonction g est concave sur l'intervalle $[0\ ;\ 13]$.

En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite **convexe** (respectivement **concave**) si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe. De plus on a les propriétés suivantes :

Propriété 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

Ici, la fonction dérivée g' est visiblement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 13]$, la fonction g est donc concave sur cet intervalle et la proposition 3 est vraie.

Remarque *: attention ici de ne pas parler de la dérivée seconde, rien n'affirme dans les données que la fonction g est deux fois dérivable* !

3. On donne la courbe représentative de la fonction h définie sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

Proposition 4 (Vraie)

La fonction h est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.

La fonction h est définie et continue sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$ donc intégrable. Elle est de plus positive sur cet intervalle et admet donc par exemple comme primitive $x \mapsto \ln x$. On a donc :

$$\int_1^{\mathrm{e}} h(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$$
$$\int_1^{\mathrm{e}} h(x)\ \mathrm{d}x = \left[\ln x\ \right]_1^{\mathrm{e}}$$
$$\int_1^{\mathrm{e}} h(x)\ \mathrm{d}x = \ln \mathrm{e} - \ln 1$$
$$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} h(x)\ \mathrm{d}x = 1}$$

Or par définition, on appelle *fonction de densité de probabilité* sur un intervalle I toute fonction définie, continue, positive sur I et telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1. La proposition 4 est donc vraie, h est bien un fonction de densité de probabilité sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.

Exercice 2. Fonction 5 points

Commun à tous les candidats

On note x le nombre de parasols produits par jour et $f(x)$ le coût de fabrication unitaire exprimé en euros.
On admet que

$$\forall x \in [1 \,;\, 18] \,;\; f(x) = 2x + 5 + 40\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}$$

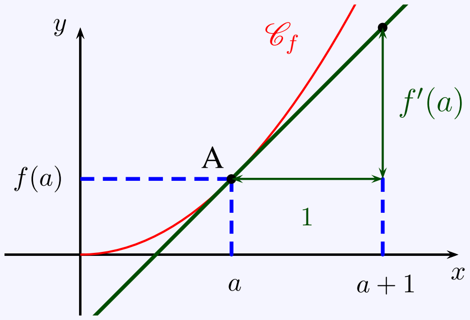
1.

1. a. Déterminer graphiquement la valeur de $f'(5)$ en expliquant la démarche.

Propriété 2 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donnée par :

$$\boxed{T \;:\; y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



La tangente (T_A) à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(5\,;\,55)$ passe aussi par le point $B(10\,;\,25)$.
Par définition, le coefficient directeur de cette droite est le nombre dérivé de f en 5 soit :

$$f'(5) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{25-55}{10-5}$$

Soit

$$\boxed{f'(5) = \frac{-30}{5} = -6}$$

1. b. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,18]$.
La fonction f est dérivable sur$[1\,;\,18]$ comme somme, produit et composée de fonctions qui le sont.

$$\forall x \in [1\,;\,18] \,;\; f'(x) = (2x+5)' + \left(40\mathrm{e}^{-0,2x+1}\right)'$$
$$f'(x) = 2 + 40\left(\mathrm{e}^{-0,2x+1}\right)'$$

Et par dérivation de la fonction exponentielle composée : $(e^u)' = u'e^u$; u dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\begin{cases} u(x) &= -0,2x+1 \\ u'(x) &= -0,2 \end{cases}$

$$\forall x \in [1\,;\,18] \,;\; f'(x) = 2 + 40 \times (-0,2)\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}$$

$$\boxed{\forall x \in [1\,;\,18] \,;\; f'(x) = 2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}}$$

1. c. Expliquer comment retrouver la réponse obtenue dans la question 1a.
On peut calculer directement l'image de 5 par f'.

$$\boxed{f'(5) = 2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2\times 5+1} = 2 - 8\,\mathrm{e}^{0} = -6}$$

2.

2. a. Montrer que $2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geq 0$ est équivalent à $x \geq 5 + 5\ln 4$.

Pour tout réel x :

$$2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geq 0 \iff 2 \geq 8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}$$
$$2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geq 0 \iff \frac{1}{4} \geq \mathrm{e}^{-0,2x+1}$$

La fonction $\ln$ étant croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a par composition :

$$\begin{aligned} 2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geq 0 &\iff \ln\frac{1}{4} \geq -0,2x+1 \\ &\iff -\ln 4 - 1 \geq -0,2x \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par (-5), l'ordre change et on obtient :

$$\begin{aligned} 2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geq 0 &\iff -5 \times (-\ln 4 - 1) \leq x \\ &\iff 5\ln 4 + 5 \leq x \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ 2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geq 0 \iff x \geq 5 + 5\ln 4}$$

2. b. En déduire le signe de la dérivée et le tableau de variation de f sur $[1\ ;\ 18]$.

On a montré lors de la question **1b.** que :

$$\forall x \in [1\ ;\ 18]\ ;\ f'(x) = 2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}$$

On vient donc de prouver lors de la question **2a.** que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ 2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geq 0 \iff x \geq 5 + 5\ln 4$$

En restreignant l'équivalence aux réels x de l'intervalle $[1\ ;\ 18]$ on obtient alors :

$$\forall x \in [1\ ;\ 18]\ ;\ f'(x) \geq 0 \iff 18 \geq x \geq 5 + 5\ln 4$$

Attention ici, en toute rigueur, il faudrait aussi résoudre l'équation $f'(x) = 0$. Des calculs similaires prouvent alors que :

$$\forall x \in [1\ ;\ 18]\ ;\ f'(x) = 0 \iff x = 5 + 5\ln 4$$

De ce fait on a l'étude complète du signe de la dérivée :

$$\boxed{\forall x \in [1\ ;\ 18]\ ;\ \left| \begin{array}{l} f'(x) > 0 \iff 18 \geq x > 5 + 5\ln 4 \\ f'(x) = 0 \iff x = 5 + 5\ln 4 \end{array} \right\} \implies\ f'(x) < 0 \iff 1 \leq x < 5 + 5\ln 4}$$

On dresse alors le tableau de variations en arrondissant les valeurs au centime d'euro

$$f\,(5 + 5\ln 4) = 20\ln 2 + 25 \approx 38,86$$

x	1		$5 + 5\ln 4$		18
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$f(1) \approx 96.02$	$\searrow$	$f\,(5 + 5\ln 4) \approx 38.86$	$\nearrow$	$f(18) \approx 43.97$

3. Déterminer par le calcul le nombre de parasols que doit produire l'entreprise pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal.

Le coût de fabrication est minimal quand f atteint son minimum. Ce minimum est atteint en

$$x = (5 + 5\ln 4) \approx 11,93$$

et vaut

$$f(5 + 5\ln 4) \approx 38,86 \text{ €}$$

Il faut donc produire 12 parasols pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal.

4.

4. a. Montrer que la fonction F définie sur $[1 \ ; \ 18]$ par $F(x) = x^2 + 5x - 200\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}$ est une primitive de f sur cet intervalle.

Définition 1

Soit f une fonction continue sur une intervalle I.
On appelle primitive de f sur I une fonction F, dérivable sur I dont la dérivée est égale à f.
Ainsi pour tout x de I on a : $F'(x) = f(x)$

La fonction F définie définie sur $[1 \ ; \ 18]$ par $F(x) = x^2+5x-200\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}$ est dérivable comme somme, produit et composée de fonctions qui le sont.

$$\begin{aligned}\forall x \in [1 \ ; \ 18] \ ; \ F'(x) &= \left(x^2 + 5x\right)' - 200\left(\mathrm{e}^{-0,2x+1}\right)' \\ F'(x) &= 2x + 5 - 200\left(\mathrm{e}^{-0,2x+1}\right)'\end{aligned}$$

Et par dérivation de la fonction exponentielle composée : $(e^u)' = u'e^u$; u dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\begin{cases} u(x) & = -0,2x+1 \\ u'(x) & = -0,2 \end{cases}$

$$\forall x \in [1 \ ; \ 18] \ ; \ F'(x) = 2x + 5 - 200 \times (-0,2)\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}$$

$$\boxed{\forall x \in [1 \ ; \ 18] \ ; \ F'(x) = 2x + 5 + 40\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} = f(x)}$$

La fonction F est donc une primitive de f sur l'intervalle $[1 \ ; \ 18]$.

4. b. Déterminer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

La fonction F est donc une primitive de f sur l'intervalle $[1 \ ; \ 18]$ donc à fortiori sur $[5 \ ; \ 15]$. De ce fait on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x \\ I &= \left[\ F(x)\ \right]_5^{15} \\ I &= F(15) - F(5) \\ I &= \underbrace{15^2 + 5 \times 15}_{300} - 200\,\mathrm{e}^{-0,2\times15+1} - \left(5^2 + 5 \times 5 - 200\,\mathrm{e}^{-0,2\times5+1}\right) \\ I &= 300 - 200\,\mathrm{e}^{-2} - 50 + 200\,\mathrm{e}^{0} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{I = \int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = 450 - 200\,\mathrm{e}^{-2}}$$

4. c. Interpréter dans le contexte de l'exercice la valeur de $\dfrac{1}{10}I$.

La valeur

$$\frac{1}{10}\,I = \frac{1}{15-5} \times \int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 42,29 \text{ €}$$

correspond au coût moyen de fabrication unitaire pour une production comprise entre 5 et 15 parasols.

Exercice 3. Probabilités — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère les évènements suivants :

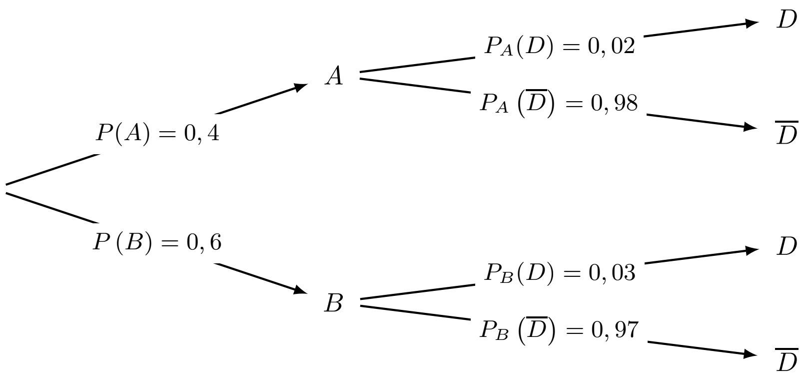
- A : « la médaille provient de la machine M_A » ;
- B : « la médaille provient de la machine M_B » ;
- D : « la médaille est défectueuse »

1.

1. a. Traduire cette situation par un arbre pondéré

- La machine M_A produit 40% de la production totale et M_B les reste donc : $P(A) = 40\% = 0,4$ et $P(B) = 60\% = 0,6$.
- La machine M_A produit 2% de médailles défectueuses donc $P_A(D) = 0,02$.
- La machine M_B produit 3% de médailles défectueuses donc $P_B(D) = 0,03$.

On peut alors construire l'arbre pondéré :



1. b. Montrer que la probabilité qu'une médaille soit défectueuse est égale à $0,026$.
On cherche $P(D)$ or d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$$
$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D)$$
$$P(D) = 0,4 \times 0,02 + 0,6 \times 0,03$$

$$\boxed{P(D) = 0,026 = 2,26\%}$$

1. c. Calculer la probabilité qu'une médaille soit produite par la machine M_A sachant qu'elle est défectueuse.
On cherche $P_D(A)$ or

$$P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)}$$
$$P_D(A) = \frac{P(A) \times P_A(D)}{0,026}$$
$$P_D(A) = \frac{0,4 \times 0,02}{0,026}$$

$$\boxed{P_D(A) = \frac{0,008}{0,026} \approx 0,308}$$

2.

2. a. Préciser la loi que suit X et donner ses paramètres.
Vérifions les hypothèses de validation d'une loi binomiale :

- La médaille a 2 états : elle est défectueuse ou pas. La probabilité qu'elle soit défectueuse :

$$p = P(D) = 0,026$$

- Il y a 20 « tirages ». Chaque tirage est indépendant, identique et aléatoire.

De ce fait, la variable aléatoire X désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière indépendante, de 20 *épreuves de Bernoulli* de paramètre $p = 0,026$.

$$\boxed{X \text{ suit donc une loi binomiale de paramètres } n = 20 \text{ et } p = 0,026, \text{ notée } \mathscr{B}(20\ ;\ 0,026)}$$

2. b. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus une médaille défectueuse dans ce lot.
La v.a. X qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(20\ ;\ 0,026)$ prend pour valeur le nombre de médailles défectueuses dans le lot.
L'évènement considéré, « il y a au plus une médaille défectueuse dans ce lot » se traduit donc par « $(X \leq 1)$ » .
Or puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0,026$ on a :

$$\forall k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ 20\}\ ;\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{20}{k} 0,026^k (0,974)^{20-k}$$

Et de ce fait

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$
$$P(X \leq 1) = \binom{20}{0}(0,026)^{50} + \binom{20}{1} 0,026^1 (0,974)^{19}$$

soit

$$\boxed{P(X \leq 1) \approx 0{,}906}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.binomFdR}(20, 0.026, 1) \approx 0{,}905\,671\,66$$

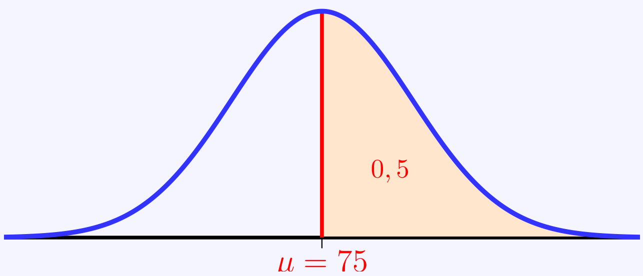
Partie B

1. Indiquer par lecture graphique la valeur de μ.

Propriété 3

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$



Donc par lecture graphique on a ici : $\boxed{\mu = 75}$.

2. Déterminer à l'aide de la calculatrice la probabilité $P(74,4 \leq X \leq 75,6)$.

$$\boxed{P(74,4 \leq X \leq 75,6) \approx 0,984}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(74.4, 75.6, 75, 0, 25) \approx 0{,}983\,604\,94$$

3. En utilisant un résultat du cours, déterminer la valeur de h pour que $P(75 - h \leq X \leq 75 + h) \approx 0,95$.

- **Méthode 1**
  On va appliquer la propriété des intervalles.

Propriété 4 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\;;\;\sigma^2\right)$ alors :

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683 \quad (1)$$
$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954 \quad (2)$$
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997 \quad (3)$$

Donc ici par identification, en appliquant le (2) de la propriété **??** on a avec $\mu = 75$ et $\sigma = 0,25$:

$$\left\{\begin{array}{ll} P(75 - h \leq X \leq 75 + h) & \approx 0,95 \\ P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) & \approx 0,954 \end{array}\right| \Longrightarrow 75 - h \approx \mu - 2\sigma \Longrightarrow h \approx 2\sigma$$

Donc on obtient

$$\boxed{h \approx 2\sigma \approx 0,5}$$

- **Méthode 2 : un peu plus précise**

Théorème 2

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\;;\;1)$.

- (1) : Pour tout réel $\alpha \in [0\;;\;1]$ il existe un unique réel u_α tel que : $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.
- (2) : Un valeur approchée de $u_{0,05}$ est $1,96$ donc $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$.
- (3) : Un valeur approchée de $u_{0,01}$ est $2,58$ donc $P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99$.

On a en soustrayant $\mu = 75$ à chaque membre puis en divisant par $\sigma = 0,25$:

$$P(75 - h \leq X \leq 75 + h) = P\left(\frac{-h}{0,25} \leq \frac{X - 75}{0,25} \leq \frac{h}{0,25}\right)$$

Donc puisque X suit la loi $\mathcal{N}\left(\mu\;;\;\sigma^2\right)$, on sait par propriété que la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - 75}{0,25} = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit alors la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\;;\;1)$.

$$P(75 - h \leq X \leq 75 + h) = P\left(\frac{-h}{0,25} \leq Y \leq \frac{h}{0,25}\right)$$

On va donc ici appliquer le (2) du théorème **??** à la variable Y qui suit bien la loi $\mathcal{N}(0\;;\;1)$. Par identification on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} P\left(\dfrac{-h}{0,25} \leq Y \leq \dfrac{h}{0,25}\right) & \approx 0,95 \\ P(-1,96 \leq X \leq 1,96) & \approx 0,95 \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{h}{0,25} \approx 1,96 \Longrightarrow h \approx 1,96\,\sigma$$

Donc on obtient

$$\boxed{h \approx 1,96\,\sigma \approx 0,49}$$

Partie C

1. Calculer, dans l'échantillon prélevé, la fréquence des médailles dont l'épaisseur n'est pas conforme.
Il y a 11 médailles sur les 180 que comporte l'échantillon qui ne sont pas conformes, de ce fait dans l'échantillon prélevé, la fréquence des médailles dont l'épaisseur n'est pas conforme est :

$$\boxed{f = \frac{11}{180} \approx 0,061}$$

2. Déterminer si ce résultat rend pertinente la décision d'arrêter la production.

- **1. Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de* $n = 180$ *médailles. Il est constaté que* 11 *d'entre elles sont non conformes.* ». Donc la fréquence observée de médailles non conformes est
  $$f = 11 \div 180 \approx 0{,}061111111 \text{ soit } \boxed{f \approx 0{,}061}$$
  - La proportion de médailles non conformes est normalement de $\underline{p = 3\%}$.
- **2. Intervalle de fluctuation** :

Théorème 3 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$
Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 180$, $p = 3$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 180 \geq 30 \\ \checkmark & np = 180 \times 0{,}03 = 5{,}4 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 180 \times 0{,}97 = 174{,}6 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}03 - 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}03 \times 0{,}97}}{\sqrt{180}} \; ; \; 0{,}03 + 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}03 \times 0{,}97}}{\sqrt{180}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}00508$. On arrondit la borne inférieure par défaut 10^{-3} près soit $\underline{0{,}005}$.
- $p + 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}05492$. On arrondit la borne supérieure par excès 10^{-3} près soit $\underline{0{,}055}$.

$$\boxed{I \approx \left[0{,}005 \; ; \; 0{,}055\right]}$$

- **Conclusion**
  La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle, $f \approx 0{,}061 \notin I$ donc le résultat du contrôle remet en question le bon réglage de la machine qui doit être vérifiée. Il faut arrêter la production.

Exercice 4. Obligatoire — 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Une retenue d'eau artificielle contient 100 000 m^3 d'eau le 1er juillet 2013 au matin. La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour. De plus, chaque soir, on doit libérer de la retenue 500 m^3 pour l'irrigation des cultures aux alentours. Cette situation peut être modélisée par une suite (u_n). Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 est $u_0 = 100\,000$. Pour tout entier naturel n supérieur à 0, u_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n-ième jour qui suit le 1er juillet 2013.

1.

1. a. Justifier que le volume d'eau u_1 au matin du 2 juillet 2013 est égal à 95 500 m^3.

Au matin du 2 juillet 2013, la retenue d'eau a perdu 4% de son volume donc il lui reste 96% des $100\,000$ m^3 auquel on enlève 500 m^3 pour l'irrigation des cultures. De fait on obtient :

$$\boxed{u_1 = 0,96 \times 100\,000 - 500 = 95\,500}$$

1. b. Déterminer le volume d'eau u_2, au matin du 3 juillet 2013.

Au matin du 3 juillet 2013, la retenue d'eau a perdu 4% de son volume précédent donc il lui reste 96% des $95\,500$ m^3 du 2 juillet auquel on enlève 500 m^3 pour l'irrigation des cultures. De fait on obtient :

$$\boxed{u_2 = 0,96 \times 95\,500 - 500 = 91\,180}$$

1. c. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,96u_n - 500$.

Plus généralement, au matin du $(n+1)$-ième jour, la retenue d'eau a perdu 4% de son volume précédent donc il lui reste 96% de son volume du n-ième jour (soit de u_n) auquel on enlève 500 m^3 pour l'irrigation des cultures. De fait on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} = 0,96 \times u_n - 500}$$

2. Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

La suite (u_n) est donc définie par récurrence. D'après la question précédente on a :

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 100\,000 \\ u_{n+1} & = 0,96\, u_n - 500 \end{cases} ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

Donc on peut compléter l'algorithme.

L1	**Variables :**	u est un nombre réel
L2		$n$est un entier naturel
L3	**Traitement :**	Affecter à u la valeur 100 000
L4		Affecter à n la valeur 0
L5		Tant que $u > 0$
L6		Affecter à n la valeur $\boxed{n+1}$
L7		Affecter à u la valeur $\boxed{0.96 \times u - 500}$
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher $\boxed{n}$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 12\,500$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,96$. Préciser son premier terme.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 100\,000 \\ u_{n+1} & = 0{,}96 \times u_n - 500 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n + 12\,500 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} + 12\,500\\
v_{n+1} &= (0{,}96\,u_n - 500) + 12\,500\\
v_{n+1} &= 0{,}96 \times u_n + 12\,000\\
v_{n+1} &= 0{,}96 \times \left(u_n + \frac{12\,000}{0{,}96}\right)\\
v_{n+1} &= 0{,}96 \times (u_n + 12\,500)\\
v_{n+1} &= 0{,}96 \times v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}96$, et de premier terme $v_0 = 112\,500$ puisque :

$$\begin{aligned}
v_0 &= u_0 + 12\,500\\
v_0 &= 100\,000 + 12\,500\\
v_0 &= 112\,500
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 &= 112\,500 \\ v_{n+1} &= 0{,}96 \times v_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. Exprimer v_n en fonction de n.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}96$, et de premier terme $v_0 = 112\,500$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; v_n = 112\,500 \times (0{,}96)^n}$$

3. c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 112\,500 \times 0{,}96^n - 12\,500$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n + 12\,500$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n - 12\,500$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; u_n = 112\,500 \times (0{,}96)^n - 12\,500}$$

4. 4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $112\,500 \times 0,96^n - 12\,500 > 0$.

Pour tout entier naturels n :

$$\begin{aligned}
112\,500 \times 0,96^n - 12\,500 > 0 &\iff 112\,500 \times 0,96^n > 12\,500\\
&\iff 0,96^n > \frac{12\,500}{112\,500} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

En composant par la fonction $\ln$ définie et croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$112\,500 \times 0,96^n - 12\,500 > 0 \iff \ln 0,96^n > \ln\frac{1}{9} = -\ln 9$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$112\,500 \times 0,96^n - 12\,500 > 0 \iff n \ln 0,96 > -\ln 9$$

En divisant chaque membre par $\ln 0,96 < 0$, l'ordre change et :

$$112\,500 \times 0,96^n - 12\,500 > 0 \iff n < \frac{-\ln 9}{\ln 0,96} \approx 53,82$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels inférieurs ou égaux à 53.

$$\boxed{S = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\cdots\,;\,52\,;\,53\}}$$

4. b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

La retenue d'eau ne contiendra plus d'eau le 54ième jour qui suit le 1er juillet 2013. Soit le 24 Août 2013.

Remarque : le matin du 53ième jour il ne restera qu'environ $427,897$ m^3 d'eau.

Exercice 4. Spécialité — 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

- s_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur SAFIR en $2014 + n$;
- t_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en $2014 + n$;

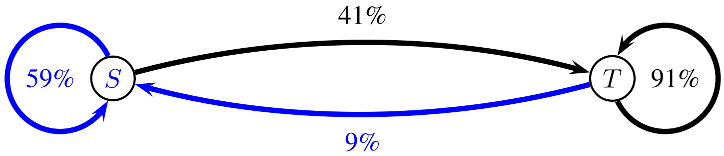
Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste $\mathscr{G}$.

On peut représenter cette « marche aléatoire » à l'aide d'un graphe. On sait que :

- 41% des clients de SAFIR le quitte pour TECIM , donc 59% restent ;
- 9% des clients de TECIM le quitte pour SAFIR, donc 91% restent .

En notant S l'état « l'utilisateur est client de l'opérateur SAFIR » et T l'état « l'utilisateur est client de l'opérateur TECIM » :



2. On admet que la matrice de transition du graphe en considérant les sommets dans l'ordre S et T est $M = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$.

On note $P = (a \;\; b)$ la matrice ligne correspondant à l'état stable.

2. a. Montrer que les nombres a et b sont les solutions du système : $\begin{cases} 0,41a - 0,09b &= 0 \\ a + b &= 1 \end{cases}$.

Propriété 5

Pour trouver l'**état stable** par le calcul dans un système a deux états possibles, il faut résoudre l'équation

$$P = P \times M \text{ avec } P = \begin{pmatrix} x & 1 - x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

L'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ avec $a + b = 1$ du graphe probabiliste est donc la solution du système :

$$P = P \times M \;\text{ et }\; a + b = 1 \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix} \;\text{ et }\; a + b = 1$$

$$\iff \begin{cases} 0,59\,a + 0,09\,b &= a \\ 0,41\,a + 0,91\,b &= b \\ a + b &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -0,41\,a + 0,09\,b &= 0 \\ 0,41\,a - 0,09\,b &= 0 \\ a + b &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,41a - 0,09b &= 0 \\ a + b &= 1 \end{cases}$$

Les nombres a et b sont donc les solutions du système :

$$\boxed{\begin{cases} 0,41a - 0,09b &= 0 \\ a + b &= 1 \end{cases}}$$

2. b. Résoudre le système précédent.

$$\begin{cases} 0,41a - 0,09b & = 0 \quad : (E_1) \\ a+b & = 1 \quad : (E_2) \end{cases} \iff \begin{cases} -0,5b & = -0,41 \quad : (E_1) - 0,41 \times (E_2) \\ a+b & = 1 \quad : (E_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b & = \dfrac{-0,41}{-0,5} \\ a+b & = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b & = 0,82 \\ a & = 1 - 0,82 \end{cases}$$

Le couple solution du système est donc $\boxed{(0,18\ ;\ 0,82)}$ d'où la matrice de l'état stable :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0,18 & 0,82 \end{pmatrix}}$$

3. On admet que $a = 0,18$ et $b = 0,82$.
Déterminer si l'opérateur TECIM peut espérer atteindre son objectif d'avoir au moins 80% de la population.
La matrice de l'état stable est :

$$P = \begin{pmatrix} 0,18 & 0,82 \end{pmatrix}$$

Donc au bout d'un grand nombre d'année l'opérateur TECIM aura 82% de la population utilisatrice de la 4G et la proportion va se stabiliser sur ce niveau. Il peut donc espérer atteindre donc objectif qui était d'au moins 80%, mais quand ? ... La suite de l'exercice va y répondre !

Partie B

On donne $P = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la répartition des clients au bout de 2 ans.
On a

$$P_2 = \begin{pmatrix} s_2 & t_2 \end{pmatrix} = P_0 \times M^2$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} s_2 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}^2$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} s_2 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,385 & 0,615 \\ 0,135 & 0,865 \end{pmatrix}$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} s_2 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}222\,5 & 0{,}777\,5 \end{pmatrix}$$

Donc au bout de 2 ans, l'opérateur <u>SAFIR aura $22,25\%$ des parts de marché</u> et <u>TECIM le reste soit $77,75\%$</u>.

2. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $t_{n+1} = 0,5\,t_n + 0,41$.
On sait que pour tout entier naturel n on a :

$$P_{n+1} = P_n \times M$$

Donc ici

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} s_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$$
$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} s_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,59\,s_n + 0,09\,t_n & 0,41\,s_n + 0,91\,t_n \end{pmatrix}$$

De ce fait pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} = 0,41\,s_n + 0,91\,t_n$$

Or on a pour tout entier naturel n :

$$s_n + t_n = 1$$

Donc en reportant dans l'égalité précédente on obtient :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\,;\ t_{n+1} &= 0,41\, s_n + 0,91\, t_n \\ t_{n+1} &= 0,41 \times (1-t_n) + 0,91\, t_n \\ t_{n+1} &= 0,41 - 0,41\, t_n + 0,91\, t_n\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ t_{n+1} = 0,5\, t_n + 0,41}$$

3. Pour déterminer au bout de combien de temps TECIM aura atteint son objectif on a réalisé l'algorithme suivant. Recopier les lignes L6, L7 et L9 pour qu'il donne le résultat.

On utilise le résultat de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ t_{n+1} = 0,5\, t_n + 0,41$$

D'où :

L1	**Variables :**	T est un nombre
L2		N est un nombre entier
L3	**Traitement :**	Affecter à T la valeur $0,65$
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $T < 0,80$
L6		Affecter à T la valeur $\boxed{0,5 \times T + 0,41}$.
L7		Affecter à N la valeur $\boxed{N+1}$
L8		Fin Tant que.
L9	**Sortie :**	Afficher $\boxed{N}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = t_n - 0,82$.

4. a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

Les suites (t_n) et (u_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(t_n) : \begin{cases} t_0 &= 0{,}65 \\ t_{n+1} &= 0{,}5 \times t_n +\ 0{,}41 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (u_n) : \begin{cases} u_0 & \\ u_n &= t_n -\ 0{,}82 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= t_{n+1} - 0{,}82 \\ u_{n+1} &= (0{,}5\, t_n +\ 0{,}41)\ - 0{,}82 \\ u_{n+1} &= 0{,}5 \times t_n - 0{,}41 \\ u_{n+1} &= 0{,}5 \times \left(t_n + \frac{-0{,}41}{0{,}5}\right) \\ u_{n+1} &= 0{,}5 \times (t_n - 0{,}82) \\ u_{n+1} &= 0{,}5 \times u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $u_0 = -0{,}17$ puisque :

$$\begin{aligned} u_0 &= t_0 - 0{,}82 \\ u_0 &= 0{,}65 - 0{,}82 \\ u_0 &= -0{,}17 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_0 &= -0{,}17 \\ u_{n+1} &= 0{,}5 \times u_n \end{cases} ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

4. b. En déduire que : $t_n = -0,17 \times 0,5^n + 0,82$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $u_0 = -0{,}17$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; u_n = u_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; u_n = -0{,}17 \times (0{,}5)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$u_n = t_n - 0{,}82$$

On peut en déduire l'expression :

$$t_n = u_n + 0{,}82$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; t_n = -0{,}17 \times (0{,}5)^n + 0{,}82}$$

4. c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $-0,17 \times 0,5^n + 0,82 \geq 0,80$.

Pour tout entier naturels n :

$$\begin{aligned} -0,17 \times 0,5^n + 0,82 \geq 0,80 &\iff -0,17 \times 0,5^n \geq -0,02 \\ &\iff 0,5^n \leq \frac{-0,02}{-0,17} = \frac{2}{17} \end{aligned}$$

En composant par la fonction $\ln$ définie et croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$-0,17 \times 0,5^n + 0,82 \geq 0,80 \iff \ln 0,5^n \leq \ln \frac{2}{17}$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$-0,17 \times 0,5^n + 0,82 \geq 0,80 \iff n \ln 0,5 \leq \ln \frac{2}{17} = \ln 2 - \ln 17$$

En divisant chaque membre par $\ln 0,5 < 0$, l'ordre change et :

$$-0,17 \times 0,5^n + 0,82 \geq 0,80 \iff n \geq \frac{\ln 2 - \ln 17}{\ln 0,5} \approx 3,087$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 4.

$$\boxed{S = \{4\,;\, 5\,;\, 6\,;\, \cdots\}}$$

4. d. Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Cela signifie donc que l'opérateur TECIM atteindra son objectif dans 4 ans.

- Fin du devoir -