Baccalauréat 2015 - ES/L Amérique du Nord

Série ES/L Obli. et Spé.
2 Juin 2015
Correction

Exercice 1. QCM — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Question 1 (Réponse C)

1. Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 0,95 permettant de connaître la proportion de gauchers dans la population française est (les bornes ont été arrondies à 10^{-3}) :

1. a. $[0,120\ ;\ 0,122]$ **1. b.** $[0,863\ ;\ 0,895]$ **1. c.** $\boxed{[0,105\ ;\ 0,137]}$ **1. d.** $[0,090\ ;\ 0,152]$

- **1. Analyse des données** : « *Sur un échantillon de* $n = 4000$ *, il est constaté que 484 sont gauchers* ». Don on a :

$$f = \frac{484}{400} = 12.1\ \%$$

- **2. Intervalle de confiance** :

Théorème 1 (Intervalle de confiance)

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p.

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & nf \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est : $I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

On a pour le cas étudié, $n = 4\,000$, $f = 12{,}1\ \%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 4000 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 4000 \times 0{,}121 = 484 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 4000 \times 0{,}879 = 3516 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}121 - \frac{1}{\sqrt{4000}}\ ;\ 0{,}121 + \frac{1}{\sqrt{4000}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $0{,}121-\dfrac{1}{\sqrt{4000}}\approx 0{,}10519$. On arrondit la borne inférieure par défaut 10^{-3} près soit $\underline{0{,}105}$.
- $0{,}121+\dfrac{1}{\sqrt{4000}}\approx 0{,}13681$. On arrondit la borne supérieure par excès 10^{-3} près soit $\underline{0{,}137}$.

$$\boxed{I\approx\left[0{,}105\ ;\ 0{,}137\right]}$$

- **Conclusion** : la bonne réponse est donc la **1d.**

Question 2 (Réponse D)

2. La taille n de l'échantillon que l'on doit choisir afin d'obtenir un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 ayant une amplitude de 0,01 est :

2. a. $n = 15$ **2. b.** $n = 200$ **2. c.** $n = 10\,000$ **2. d.** $\boxed{n = 40\,000}$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est :

$$I_n=\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\quad \text{d'amplitude}\quad f+\frac{1}{\sqrt{n}}-\left(f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}$$

On cherche donc $n>0$ tel que $\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0,01$ soit :

$$\frac{2}{\sqrt{n}}=0,01\iff\sqrt{n}=\frac{2}{0,01}=200\iff\begin{cases} n & >0\\ n & =40\,000\end{cases}$$

Conclusion : la bonne réponse est donc la **2d.**

Partie B

On appelle X la variable aléatoire qui donne le temps en seconde mis par un élève de CE2 pour passer le test. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu=32$ et d'écart-type $\sigma=13$.

Question 3 (Réponse B)

3. La probabilité $p(19\leqslant X\leqslant 45)$ arrondie au centième est :

3. a. $0,50$ **3. b.** $\boxed{0,68}$ **3. c.** $0,84$ **3. d.** $0,95$

La calculatrice donne directement : $p(19\leqslant X\leqslant 45)\approx 0,683$.
Conclusion : la bonne réponse est donc **3b**.
Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(19,45,32,13)\approx 0{,}682\,689\,48$$

Question 4 (Réponse C)

4. On note t la durée de lecture vérifiant $p(X\leqslant t)=0,9$. La valeur de t arrondie à l'entier est :

4. a. $t = 32\ s$ **4. b.** $t = 45\ s$ **4. c.** $\boxed{t = 49\ s}$ **4. d.** $t = 58\ s$

On peut tester les valeurs, la calculatrice donne directement le résultat.

Conclusion : La bonne réponse est 49s soit la **4c**.
Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.invNorm}(0.9,32,13)\approx 48{,}660\,17$$

Exercice 2. Obligatoire (ES et Spé L) : Probabilités — 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

On note :

- S l'évènement « l'élève choisi est inscrit à l'association sportive »
- F l'évènement « l'élève choisi est fumeur »

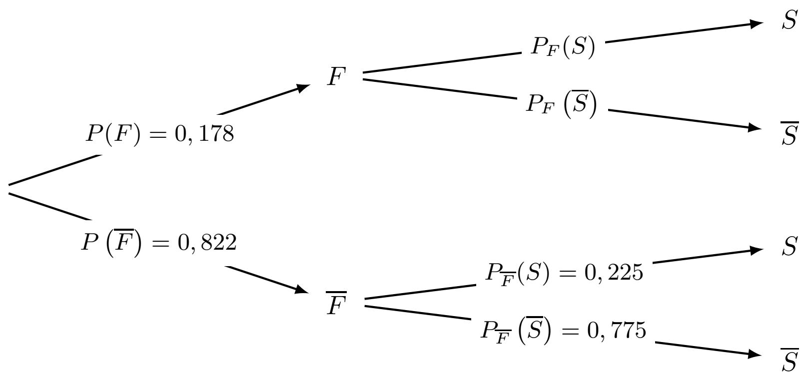
Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les valeurs des probabilités $p(S)$ et $p_{\overline{F}}(S)$.

- Dans un grand collège, « 20,3 % des élèves sont inscrits à l'association sportive », donc : $\boxed{p(S) = 0,203}$.
- De plus, « parmi les élèves non fumeurs, 22,5 % sont inscrits à l'association sportive », donc : $\boxed{p_{\overline{F}}(S) = 0,225}$.

2. Recopier l'arbre ci-dessous et remplacer chacun des quatre pointillés par la probabilité correspondante.

On sait en outre que « 17,8 % des élèves sont fumeurs », donc : $\boxed{p(F) = 0,178}$.



3. Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{F} \cap S$ et interpréter le résultat.

$$p\left(\overline{F} \cap S\right) = p_{\overline{F}}(S) \times p(S)$$
$$p\left(\overline{F} \cap S\right) = 0,225 \times 0,822 = 0,18495$$

Soit arrondi au millième :

$$\boxed{p\left(\overline{F} \cap S\right) \approx 0,185}$$

Il y a donc environ <u>$18,5\%$ des élèves qui sont non fumeurs et inscrits à l'association sportive</u>.

4. On choisit au hasard un élève parmi ceux inscrits à l'association sportive. Calculer la probabilité qu'il soit non fumeur.

La probabilité cherchée est en utilisant la valeur exacte de $p\left(\overline{F} \cap S\right) = 0,18495$:

$$\boxed{p_S\left(\overline{F}\right) = \frac{p\left(\overline{F} \cap S\right)}{p(S)} = \frac{0,18495}{0,203} \approx 0,911}$$

5. On choisit au hasard un élève parmi les élèves fumeurs. Montrer que la probabilité que cet élève soit inscrit à l'association sportive est de 0,101.

On cherche $p_F(S)$.

$$p_F(S) = \frac{p(F \cap S)}{p(F)}$$

Il nous faut donc calculer $p(F \cap S)$. d'après la formule des probabilité totales on a :

$$p(F \cap S) + p\left(\overline{F} \cap S\right) = p(S)$$
$$p(F \cap S) = p(S) - p\left(\overline{F} \cap S\right)$$
$$p(F \cap S) = 0,203 - 0,18495$$
$$p(F \cap S) = 0,01805$$

On a donc :

$$\boxed{p_F(S) = \frac{p(F \cap S)}{p(F)} = \frac{0,01805}{0,178} \approx 0,101}$$

©ISSN 2272-5318

Partie B

Une loterie, à laquelle tous les élèves du collège participent, est organisée pour la journée anniversaire de la création du collège. Quatre lots sont offerts. On admet que le nombre d'élèves est suffisamment grand pour que cette situation soit assimilée à un tirage avec remise. On rappelle que 20,3 % de l'ensemble des élèves sont inscrits à l'association sportive. En justifiant la démarche, calculer la probabilité que parmi les quatre élèves gagnants, il y ait au moins un qui soit inscrit à l'association sportive.

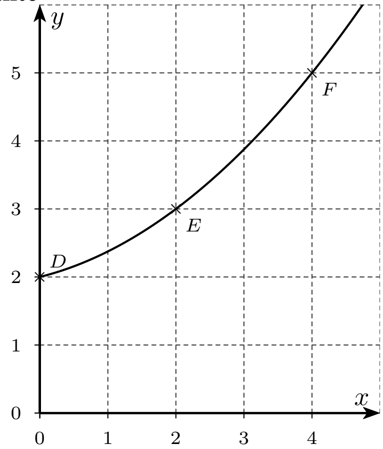
- **Montrons que l'on est en présence d'un modélisation par une loi binomiale**.
  Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de gagnants inscrits à l'association sportive. Vérifions les hypothèses de validation d'une loi binomiale :
  - Un élève a *2 états* : il est inscrit à l'association ou ne l'est pas. La probabilité d'être inscrit est donc :
  $$p = p(S) = 20,3\% = 0,203$$
  - Les 4 tirages sont sont *aléatoires*, *indépendants* et *identiques*.
    De ce fait, la variable aléatoire X désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière *indépendante*, de 4 *épreuves de Bernoulli* de paramètre p.
    X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,203$.

- **Calculons la probabilité cherchée**.
  Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = 0,203$ on a pour $k \in [\![0\,;\,4]\!]$:
  $$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{4}{k} 0,203^k (0,797)^{4-k}$$
  Or la probabilité que parmi les quatre élèves gagnants, il y ait au moins un élève qui soit inscrit à l'association sportive est : $P(X \geq 1)$. Soit :
  $$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$
  $$P(X \geq 1) = 1 - \binom{4}{0} 0,203^0 (0,797)^4$$
  $$P(X \geq 1) = 1 - 1 \times 1 \times 0,797^4$$
  soit
  $$\boxed{P(X \geq 1) \approx 0{,}597}$$

©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Spécialité ES : Matrices et graphes — 5 points

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité



Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 est passée à 300 agences au 1er janvier 2012 puis à 500 agences au 1er janvier 2014.
On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels.
La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines. la valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.
Sur le dessin , on a représenté graphiquement la fonction f.

Partie A

1.

1. a. À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.

On a d'après les données, puisque $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines :

- « L'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 » soit $f(0) = 2$.
- « L'entreprise qui comptait 300 agences au 1er janvier 2012 » soit $f(2) = 3$.
- « L'entreprise qui comptait 500 agences au 1er janvier 2014 » soit $f(4) = 5$.

On obtient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} f(0) & = 2 \\ f(2) & = 3 \\ f(4) & = 5 \end{array}\right. \underset{f(x)=ax^2+bx+c}{\iff} \boxed{\mathcal{S} : \left\{\begin{array}{rl} c & = 2 \\ 4a + 2b + c & = 3 \\ 16a + 4b + c & = 5 \end{array}\right.}$$

1. b. En déduire que le système est équivalent à : $MX = R$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a :

$$\mathcal{S} : \left\{\begin{array}{rl} c & = 2 \\ 4a + 2b + c & = 3 \\ 16a + 4b + c & = 5 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ équivaut à } MX = R \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

©ISSN 2272-5318

2. On admet que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des cœfficients a, b et c, en détaillant les calculs.
La matrice M est inversible donc :

$$MX = R \iff X = M^{-1} \times R$$
$$MX = R \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$MX = R \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 \times 2 - 0,25 \times 3 + 0,125 \times 5 \\ -0,75 \times 2 + 1 \times 3 - 0,25 \times 5 \\ 1 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 5 \end{pmatrix}$$
$$MX = R \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 \\ 0,25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne donc les valeurs cherchées :

$$\boxed{a = 0,125 \,;\ b = 0,25 \,;\ c = 2}$$

3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1er janvier 2016.
On a donc
$$f(x) = 0,125x^2 + 0,25x + 2$$
Le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1er janvier 2016 est donné, en centaines, par $f(6)$ soit :

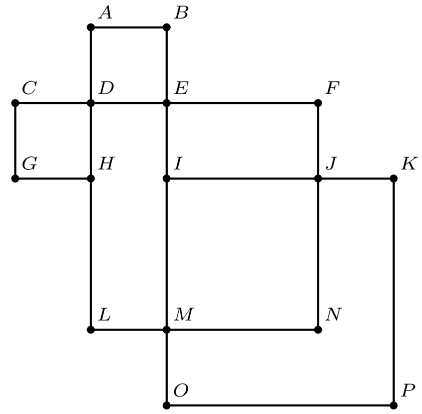
$$\boxed{100 \times f(6) = 800}$$

il y aura <u>800 agences en 2016</u>.

©ISSN 2272-5318

Partie B

Le responsable d'une agence de services à domicile implantée en ville a représenté par le graphe ci-dessous toutes les rues dans lesquelles se trouvent des clients qu'il doit visiter quotidiennement. Dans ce graphe, les arêtes sont les rues et les sommets sont les intersections des rues.



1. 1. a. Déterminer si le graphe est connexe.

Un graphe est dit *connexe* si quels que soient les sommets u et v, il existe une chaîne de u vers v. C'est-à-dire, s'il existe une suite d'arêtes permettant d'atteindre v à partir de u.
Dans le graphe proposé, il existe une chaîne entre chacun des sommets par conséquent le graphe est *connexe*.

1. b. Déterminer si le graphe est complet.

- Un *graphe simple* est un graphe sans boucle dont chaque couple de sommets est relié par au plus une arête.
  Donc le *graphe est simple*.
- Un graphe simple est dit *complet* si tous les sommets sont adjacents, c'est-à-dire s'il existe toujours une (et une seule) arête entre deux sommets disjoints.
- Ici les sommets A et N par exemple ne sont pas reliés par une arête, le graphe n'est pas complet.

Ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue.

2. Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants :

2. a. Le point d'arrivée est le même que le point de départ.

Citons le théorème d'Euler

Théorème 2 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

Un graphe connexe contient **une chaîne eulérienne** si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
Un graphe connexe contient **un cycle eulérien** si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (autrement dit tous ses sommets sont de degré pair).
Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
2	2	2	4	4	2	2	3	3	4	2	2	4	2	2	2

Tous les sommets ne sont pas de degré pair puisque H et I sont de degré 3. D'après le théorème 2 d'Euler-Hierholzer, le graphe ne possède donc pas de cycle eulérien. Il est donc impossible de construire un circuit passant une et une seule fois par chaque rue de telle sorte que le point de départ et le point d'arrivée soit le même.

2. b. Le point d'arrivée n'est pas le même que le point de départ.

Il y a seulement 2 sommet degré pair, les sommets H et I sont de degré 3. Donc d'après le théorème 2 d'Euler-Hierholzer, le graphe possède une chaîne eulérienne. Il est donc impossible de construire un circuit passant une et une seule fois par chaque rue de telle sorte que le point de départ et le point d'arrivée soit différent.

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Suites — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Calculer l'effectif de cette population de singes :

1. a. au 1er janvier 2005 ;

Puisque le nombre de singes baisse chaque année de 15%, en 2005 il reste 85% des 25 000 singes de 2004 soit :

$$\boxed{25\,000 \times 0,85 = 21\,250}$$

1. b. au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier ;

Puisque le nombre de singes baisse chaque année de 15%, en 2006 il reste 85% des 21 250 singes de 2005 soit :

$$\boxed{21\,250 \times 0,85 = 18\,062{,}5 \approx 18\,062}$$

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25\,000 \times 0,85^n$.

Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2004 + n$.
Ainsi, puisque le nombre de singes baisse chaque année de 15%, le terme u_{n+1} s'obtient en prenant 85% du nombre de singes de l'année précédente, soit de u_n :

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 25\,000 \\ u_{n+1} & = 0,85 \times u_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,85$, et de premier terme $u_0 = 25\,000$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = u_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = 25\,000 \times (0,85)^n}$$

3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.

Recopier et compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

L1 :	Variables	u un réel, n un entier
L2 :	Initialisation	u prend la valeur 25 000
L3 :		n prend la valeur 0
L4 :	Traitement	Tant que $\boxed{u \geq 5\,000}$ faire
L5 :		u prend la valeur $\boxed{0,85 \times u}$
L6 :		n prend la valeur $\boxed{n+1}$
L7 :		Fin Tant que
L8 :	Sortie	Afficher n

4. Montrer que la valeur n affichée après l'exécution de l'algorithme est 10.

On va pour cela résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $25\,000 \times 0,85^n < 5\,000$.
Pour tout entier naturels n :

$$25\,000 \times 0,85^n < 5\,000 \Longleftrightarrow 0,85^n < \frac{5\,000}{25\,000} = \frac{1}{5}$$

En composant par la fonction $\ln$ définie et croissante sur $]0\;;\;+\infty[$, on a :

$$25\,000 \times 0,85^n < 5\,000 \Longleftrightarrow \ln 0,85^n < \ln \frac{1}{5} = -\ln 5$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$25\,000 \times 0,85^n < 5\,000 \iff n \ln 0,85 < -\ln 5$$

En divisant chaque membre par $\ln 0,85 < 0$, l'ordre change et :

$$25\,000 \times 0,85^n < 5\,000 \iff n > \frac{-\ln 5}{\ln 0,85} \approx 9,90$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 10.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{10\ ;\ 11\ ;\ 12 \cdots\}}$$

La valeur affichée par l'algorithme est donc bien 10.

Partie B

À partir du 1er janvier 2014, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances. On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014 + n$. On a ainsi $v_0 = 5\,000$.

1. 1. a. Calculer v_1 et v_2.

- Le terme v_1 de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année 2015. Or chaque année, un quart des singes disparaît donc en 2015 il reste 75% des 5 000 singes de 2014 auquel il faut ajouter les 400 naissances. On a donc :

$$\boxed{v_1 = 0,75 \times v_0 + 400 = 4\,150}$$

- Le terme v_2 de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année 2016. Or chaque année, un quart des singes disparaît donc en 2016 il reste 75% des 4 150 singes de 2015 auquel il faut ajouter les 400 naissances. On a donc :

$$\boxed{v_2 = 0,75 \times v_1 + 400 = 3\,512{,}5 \approx 3\,512}$$

1. b. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$.

Le terme v_{n+1} de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014 + (n+1)$. Or chaque année, un quart des singes disparaît donc en $2014 + (n+1)$ il reste 75% des v_n singes de $2014 + n$ auquel il faut ajouter les 400 naissances. On a donc :

$$\boxed{v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400}$$

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1\,600$.

2. a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,75$. Préciser la valeur de w_0.

Les suites (v_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 5\,000 \\ v_{n+1} & = 0{,}75 \times v_n + \ 400 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (w_n) : \begin{cases} w_0 & \\ w_n & = v_n - \ 1\,600 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= v_{n+1} - 1\,600 \\
w_{n+1} &= (0{,}75\, v_n + \ 400) \ - 1\,600 \\
w_{n+1} &= 0{,}75 \times v_n - 1\,200 \\
w_{n+1} &= 0{,}75 \times \left(v_n + \frac{-1\,200}{0{,}75}\right) \\
w_{n+1} &= 0{,}75 \times (v_n - 1\,600) \\
w_{n+1} &= 0{,}75 \times w_n
\end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$, et de premier terme $w_0 = 3\,400$ puisque :

$$\begin{aligned}
w_0 &= v_0 - 1\,600 \\
w_0 &= 5\,000 - 1\,600 \\
w_0 &= 3\,400
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(w_n) : \begin{cases} w_0 & = 3\,400 \\ w_{n+1} & = 0{,}75 \times w_n \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 0{,}75$, et de premier terme $w_0 = 3\,400$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \,;\; w_n = w_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \,;\; w_n = 3\,400 \times (0{,}75)^n}$$

2. c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 1\,600 + 3\,400 \times 0,75^n$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$w_n = v_n - 1\,600$$

On peut en déduire l'expression :

$$v_n = w_n + 1\,600$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \,;\; v_n = 3\,400 \times (0{,}75)^n + 1\,600}$$

2. d. Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

Par théorème

Théorème 3

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < q = 0,75 < 1$ et d'après le théorème 3 :

$$\lim_{n \to +\infty} 3\,400 \times (0,75)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (v_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = 1\,600}$$

La population de singes va donc se stabiliser vers 1 600 dans un nombre d'années important.

Complément : on pouvait à l'aide de la calculatrice vérifier cette assertion.

Année	n	v_n
2014	0	5000
2015	1	4150
2016	2	3512,5
2017	3	3034,375
2018	4	2675,78125
2019	5	2406,835938
2020	6	2205,126953
2021	7	2053,845215
2022	8	1940,383911
2023	9	1855,287933
2024	10	1791,46595

Année	n	v_n
2025	11	1743,599463
2026	12	1707,699597
2027	13	1680,774698
2028	14	1660,581023
2029	15	1645,435767
2030	16	1634,076826
2031	17	1625,557619
2032	18	1619,168214
2033	19	1614,376161
2034	20	1610,782121
2035	21	1608,08659

Année	n	v_n
2036	22	1606,064943
2037	23	1604,548707
2038	24	1603,41153
2039	25	1602,558648
2040	26	1601,918986
2041	27	1601,439239
2042	28	1601,07943
2043	29	1600,809572

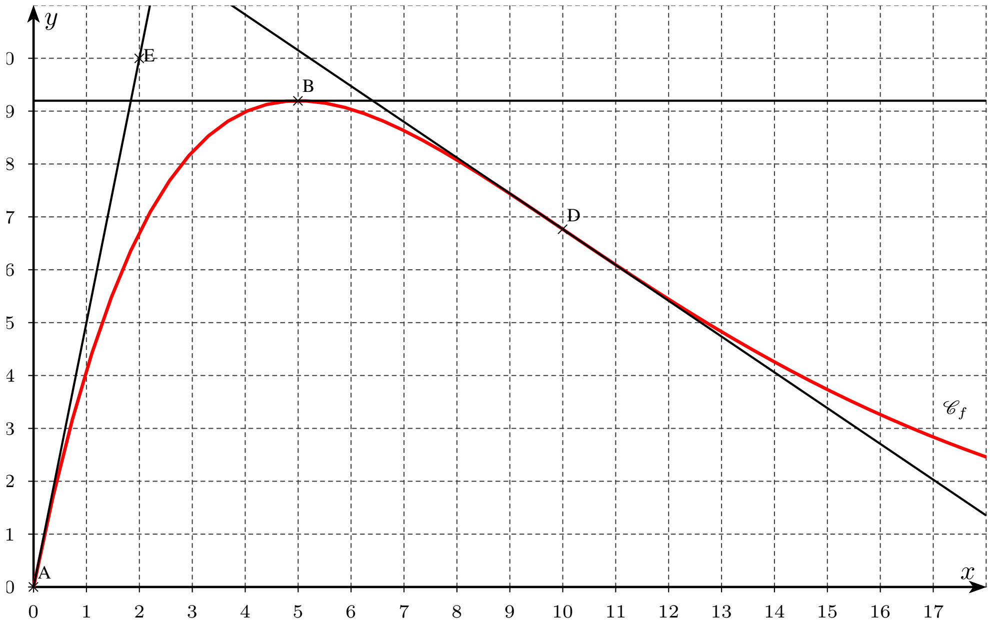
©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Fonctions — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 18]$ ainsi que les tangentes au point A d'abscisse 0, au point B d'abscisse 5 et au point D d'abscisse 10. On sait aussi que la tangente au point A passe par le point E de coordonnées $(2\ ;\ 10)$ et que la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

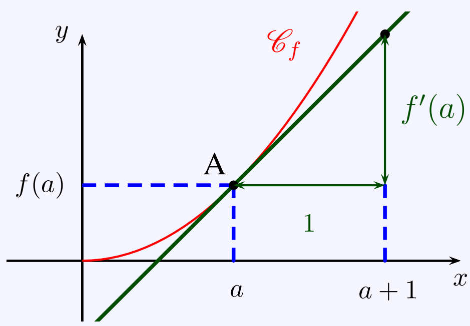


1. Donner les valeurs de $f'(5)$ et de $f'(0)$.

Propriété 1 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donnée par :

$$\boxed{T\ :\ y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



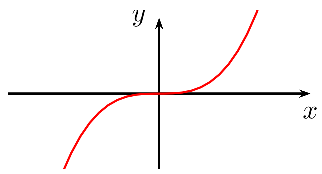
- **En 0**
  La tangente (T_A) à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(0\ ;\ 0)$ passe aussi par le point $E(2\ ;\ 10)$.
  Par définition, le coefficient directeur de cette droite est le nombre dérivé de f en 0 soit :
  $$f'(0) = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{10-0}{2-0}$$
  Soit
  $$\boxed{f'(0) = \frac{10}{2} = 5}$$
- **En 5**
  La tangente (T_B) à la courbe $\mathscr{C}$ au point $B(5\ ;\ f(5))$ est parallèle à l'axe des abscisses donc de coefficient directeur 0.
  Par définition, le coefficient directeur (ici nul) de cette droite est le nombre dérivé de f en 5 soit :
  $$\boxed{f'(5) = 0}$$

 ©ISSN 2272-5318

2. On admet que D est un point d'inflexion. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Définition 1 (Point d'inflexion d'une fonction numérique)

- Si, en un point de la courbe représentative d'une fonction continue, la concavité passe du type « convexe » au type « concave » (ou l'inverse), on appelle ce point, **point d'inflexion de la courbe**.
- Graphiquement, un point d'inflexion est un point où la tangente coupe la courbe.
- En un point d'inflexion, **la dérivée seconde, si elle existe, s'annule et change de signe**.



Représentation graphique de la fonction

$x \mapsto x^3$

montrant un point d'inflexion aux coordonnées $(0, 0)$.

Partie B

En abscisses, x représente le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire. En ordonnées, $f(x)$ représente le nombre de milliers de jouets vendus le x-ième jour. Ainsi, par exemple, le 10-ième jour après le début de la campagne publicitaire, l'entreprise prévoit de vendre environ 6 800 jouets.
On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 18]$ par $f(x) = 5x\,\mathrm{e}^{-0,2x}$.

1. Montrer que $f'(x) = (5-x)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 18]$.

$$f : \begin{cases} [0\,;\,18] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 5x \times \mathrm{e}^{-0,2x} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,18]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,18]\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x) \quad : \quad \begin{cases} u(x) = 5x & ; \quad u'(x) = 5 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-0,2x} & ; \quad v'(x) = \left(-0,2\,\mathrm{e}^{-0,2x}\right) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;\,18],\quad f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 5 \times \mathrm{e}^{-0,2x} + 5x \times \left(-0,2\,\mathrm{e}^{-0,2x}\right) \\ f'(x) &= (5-x) \times \mathrm{e}^{-0,2x} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,18]\ ;\ f'(x) = (5-x)\,\mathrm{e}^{-0,2x}}$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ 18]$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ 18]$.
La fonction dérivée s'exprime ici comme un produit de deux facteurs. Pour tout réel x, le facteur $\mathrm{e}^{-0,2x}$ est strictement positif donc le signe de $f'(x)$ dépend uniquement de celui de $(5-x)$ dont l'étude est triviale.

$$\forall x \in [0\,;\,18]\ ;\ \left| \begin{array}{l} 5 - x > 0 \iff 5 > x \geq 0 \\ 5 - x = 0 \iff x = 5 \end{array} \right\} \implies 5 - x < 0 \iff 5 < x \leq 18$$

De fait $f'(x)$ est nul en $x = 5$, positif sur $]0\,;\,5[$ et négatif sur $]5\,;\,18[$.

$$f : \begin{cases} [0\,;\,18] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad f(x) = 5x \times \mathrm{e}^{-0,2x} \end{cases}$$

On va alors dresser le tableau de variations de f après avoir calculé les valeurs aux bornes :

x	0	5	18
$f(x)$	$f(0) = 0$	$f(5) = 25\,\mathrm{e}^{-1} \approx 9,2$	$f(18) = 90\,\mathrm{e}^{-3,6} \approx 2,46$

x	0		5		18
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	↗	$f(5) \approx 9.2$	↘	$f(18) \approx 2.46$

3. Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint. Préciser la valeur de ce maximum, arrondie à l'unité.

Le maximum est atteint au bout de 5 jours et on a :

$$f(5) = 25\,\mathrm{e}^{-1} \approx 9{,}196\,986$$

Or $f(5)$ représente le nombre de milliers de jouets vendus le 5-ième jour, soit ici environ 9,196 986 milliers de jouets ce qui nous donne, arrondi à l'unité 9 197 jouets.

Partie C

1. On admet que la fonction F définie sur $[0\,;\,18]$ par $F(x) = (-25x - 125)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de f.

1. a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Puisque F est une ne primitive de f sur $[0\,;\,18]$, à fortiori sur $[0\,;\,10]$ on a :

$$\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\ F(x)\ \big]_0^{10}$$

$$\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = F(10) - F(0)$$

$$\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = (-25 \times 10 - 125)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 10} - (-25 \times 0 - 125)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 0}$$

$$\boxed{\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = -375\,\mathrm{e}^{-2} + 125}$$

1. b. En déduire une estimation du nombre moyen de jouets vendus par jour durant la période des 10 premiers jours. On arrondira le résultat à l'unité.

Une estimation du nombre moyen de jouets vendus par jour durant la période des 10 premiers jours est donné par la valeur moyenne de la fonction f sur $[0\,;\,10]$ exprimée en milliers soit :

$$\boxed{\frac{1}{10}\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-375\,\mathrm{e}^{-2} + 125}{10} \approx 7,4249}$$

Le nombre moyen de jouets vendus est donc d'environ 7 425

2. Un logiciel de calcul formel nous donne les résultats suivants :

1	dériver$[(5-x)*\exp(-0.2*x)]$
	$-\exp(-0.2*x)-\dfrac{1}{5}*\exp(-0.2*x)*(-x+5)$
2	Factoriser$[-\exp(-0.2*x)-\dfrac{1}{5}*\exp(-0.2*x)*(-x+5)]$
	$\dfrac{x-10}{5}*\exp(-0.2*x)$

Utiliser ces résultats pour déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite **convexe** (respectivement **concave**) si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe. De plus on a les propriétés suivantes :

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

Proposition 2 (Fonction convexe)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est convexe si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles**.

Le logiciel de calcul formel a donc ici calculé la dérivée seconde de f et l'a factorisée. On suppose donc f deux fois dérivable avec pour tout réel x de $[0\,;\,18]$:

$$f''(x)=\frac{x-10}{5}\times \mathrm{e}^{-0,2x}=(x-10)\times \mathrm{e}^{-0,2x}\times\frac{1}{5}$$

La fonction dérivée seconde s'exprime ici comme un produit de facteurs. Pour tout réel x, le facteur $\mathrm{e}^{-0,2x}\times\dfrac{1}{5}$ est strictement positif donc le signe de $f''(x)$ dépend uniquement de celui de $(x-10)$ dont l'étude est aisée.

$$\forall x\in[0\,;\,18]\ ;\ \left|\begin{aligned}&x-10>0\iff 18\geq x>10\\&x-10=0\iff x=10\end{aligned}\right.\Bigg\}\implies\ x-10<0\iff 0\leq x<10$$

De fait $f''(x)$ est nul en $x=10$, positif sur $]10\,;\,18[$ et négatif sur $]0\,;\,10[$.

En appliquant la proposition 2 , puisque la fonction dérivée seconde est positive ou nulle sur $[10\,;\,18[$,
la fonction f est convexe sur l'intervalle $[10\,;\,18[$.