Math93.com
MathExams.fr

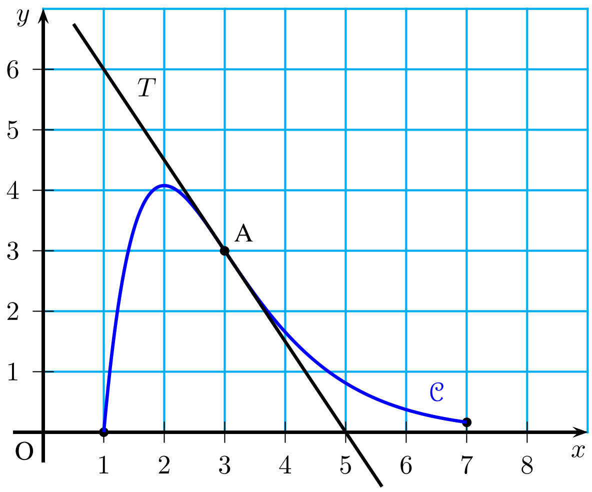
# Baccalauréat 2015 - ES
# Centres étrangers

## Série ES Obli. et Spé.
## 10 Juin 2015
## Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

## Exercice 1. QCM — 4 points

**Commun à tous les candidats**




**Question 1** (Réponse D)

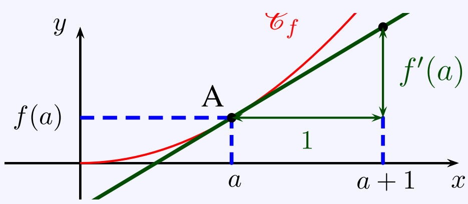
**1.** On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ :

**a.** $f'(3) = 3$ **b.** $f'(3) = \dfrac{3}{2}$ **c.** $f'(3) = -\dfrac{2}{3}$ **d.** $f'(3) = -\dfrac{3}{2}$

**Propriété 1** (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A$)

Si $f$ est dérivable en $a$ alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A$ d'abscisse $a$ est la droite qui passe par $A$ et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donnée par :

$$\boxed{T \ : \ y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$




La droite $T$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A(3 ; 3) et passe par le point de coordonnées B(5 ; 0). Par définition, le coefficient directeur de cette droite est le nombre dérivé de $f$ en 3 soit :

$$f'(3) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-3}{5-3}$$

Soit

$$\boxed{f'(3) = \frac{-3}{2}}$$

La bonne réponse est donc **1d**.

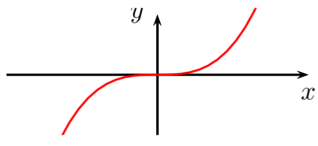
**Question 2** (Réponse B)

**2.** On note $f''$ la fonction dérivée seconde de la fonction $f$ :

**a.** $f''(3) = 3$ **b.** $f''(3) = 0$ **c.** $f''(5) = 0$ **d.** $f''(2) = 0$

**Définition 1** (Point d'inflexion d'une fonction numérique)

- Si, en un point de la courbe représentative d'une fonction continue, la concavité passe du type « convexe » au type « concave » (ou l'inverse), on appelle ce point, **point d'inflexion de la courbe**.
- Graphiquement, un point d'inflexion est un point où la tangente coupe la courbe.
- En un point d'inflexion, **la dérivée seconde, si elle existe, s'annule et change de signe**.




$x \mapsto x^3$

*Point d'inflexion en* $(0, 0)$.

On sait ici que Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$. Par conséquent, la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en A traverse $\mathcal{C}$ au voisinage de A et la dérivée s'annule en changeant de signe en ce point. On a donc $f''(3) = 0$.
Réponse 2b.

**Question 3** (Réponse A)

**3.** Toute primitive $F$ de la fonction $f$ est nécessairement :
**a.** croissante sur [1 ; 7] **b.** décroissante sur [2 ; 7] **c.** négative sur [2 ; 7] **d.** positive sur [1 ; 7]

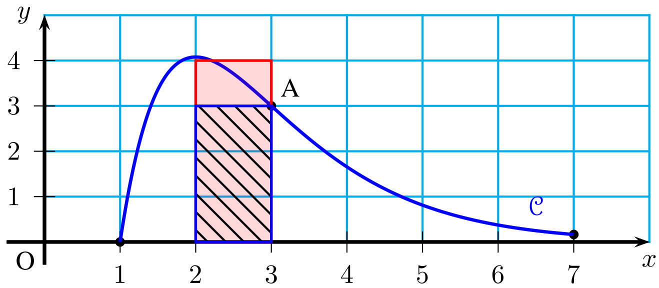
Si $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur [1 ; 7] alors $F' = f$.
De ce fait, les variations de $F$ dépendent du signe de $f$ qui est strictement positive sur l'intervalle [1 ; 7]. La fonction $F$ est donc croissante sur cette intervalle.
Réponse 3a.

**Question 4** (Réponse C)

**4.** On note $I = \displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ :

**a.** $1 \leqslant I \leqslant 2$ **b.** $2 \leqslant I \leqslant 3$ **c.** $3 \leqslant I \leqslant 4$ **d.** $4 \leqslant I \leqslant 5$

$I$ correspond à l'aire du domaine situé entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.
Cette aire contient un rectangle (hachuré en bleu) de dimension $1 \times 3$ et est contenue dans un rectangle (en rouge) de dimension $1 \times 4$.
Donc $3 \leq I \leq 4$. La bonne réponse est la réponse 4c.





©ISSN 2272-5318

## Exercice 2. Obligatoire (ES et L) : Suites — 5 points

**Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L**

La commune disposait de 200 vélos au 1er janvier 2015.
La société estime que, chaque année, 15 % des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.
On modélise cette situation par une suite $(u_n)$ où $u_n$ représente le nombre de vélos de cette commune au 1er janvier de l'année $2015 + n$.

**1. Déterminer le nombre de vélos au 1er janvier 2016.**

En 2016, 15 % des vélos sont retirés des 200 de 2015, donc il en restera 85 % auxquels s'ajouteront 42 nouveaux vélos soit :

$$\boxed{u_1 = 0,85 \times 200 + 42 = 212}$$

**2. Justifier que la suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel $n$, par : $u_{n+1} = 0,85u_n + 42$.**

Le terme $u_n$ représente le nombre de vélos de cette commune au 1er janvier de l'année $2015 + n$.
Or en $2015 + (n + 1)$, on sait que 15 % des vélos sont retirés des $u_n$ de l'année précédente, donc il en restera 85 % auxquels s'ajouteront 42 nouveaux vélos soit :

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 200 \\ u_{n+1} & = 0,85 \times u_n + 42 \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

**3. On donne l'algorithme suivant** :

| | |
|---|---|
| **Variables :** | $N$ entier |
| | $U$ réel |
| **Initialisation :** | $N$ prend la valeur 0 |
| | $U$ prend la valeur 200 |
| **Traitement :** | Tant que $N < 4$ |
| | $U$ prend la valeur $0,85 \times U + 42$ |
| | $N$ prend la valeur $N + 1$ |
| | Fin tant que |
| **Sortie :** | Afficher $U$ |

**4. 4. a. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité.**

| $U$ | 200 | 212 | 222 | 231 | 238 |
|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Condition $N < 4$ | Vrai | Vrai | Vrai | Vrai | Faux |

**Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?**
A l'arrêt de l'algorithme on obtient

$$\boxed{U = 238,2395 \approx 238}$$

**4. b. Interpréter la valeur du nombre $U$ obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme.**

La valeur du nombre $U$ obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme correspond au terme $u_4$.

**5. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 280$.**

**5. a. Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $0,85$ et de premier terme $v_0 = -80$.**

Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont définies pour tout entier $n$ par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 200 \\ u_{n+1} & = 0,85 \times u_n + 42 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 280 \end{cases}$$

Pour tout entier $n$ on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 280 \\ v_{n+1} &= (0{,}85\, u_n + 42) - 280 \\ v_{n+1} &= 0{,}85 \times u_n - 238 \\ v_{n+1} &= 0{,}85 \times \left(u_n + \frac{-238}{0{,}85}\right) \\ v_{n+1} &= 0{,}85 \times (u_n - 280) \\ v_{n+1} &= 0{,}85 \times v_n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)$ est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}85$, et de premier terme $v_0 = -80$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 280 \\ v_0 &= 200 - 280 \\ v_0 &= -80 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -80 \\ v_{n+1} & = 0{,}85 \times v_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

**5. b. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $v_n$ en fonction de $n$.**

La suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = 0{,}85$, et de premier terme $v_0 = -80$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \,;\; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \,;\; v_n = -80 \times (0{,}85)^n}$$

**5. c. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = -80 \times 0,85n + 280$.**

De l'égalité définie pour tout entier $n$ :

$$v_n = u_n - 280$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 280$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \,;\; u_n = -80 \times (0{,}85)^n + 280}$$

**5. d. Calculer la limite de la suite $(u_n)$ et interpréter ce résultat.**

**Théorème 1**
Si le réel $q$ est tel que : $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < q = 0,85 < 1$ et d'après le théorème 1 :

$$\lim_{n \to +\infty} -80 \times (0,85)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite $(u_n)$ :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 280}$$

Au bout d'un grand nombre d'année, le nombre de vélo en circulation se stabilisera à 280.

**6. La société facture chaque année à la commune 300 € par vélo en circulation au 1er janvier. Déterminer le coût total pour la période du 1er janvier 2015 au 31 décembre 2019, chacun des termes utilisés de la suite $(u_n)$ étant exprimé avec un nombre entier.**

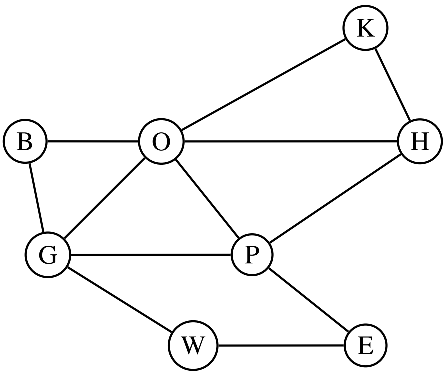
On doit donc calculer le nombre de vélo mis en service sur les cinq années :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 200 + 212 + 222 + 231 + 238 = 1103$$

Le coût total est donc de $1103 \times 300 = 330900$ euros sur cette période.

## Exercice 2. Spécialité (ES spé. Maths) : Graphes — 5 points

**Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité**




**Légende :**
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

**1. 1. a. Déterminer en justifiant si le graphe Γ est connexe.**

> **Définition 2** (Graphe connexe)
> Un graphe est dit **connexe** si quels que soient les sommets u et v, il existe une chaîne de u vers v. C'est-à-dire, s'il existe une suite d'arêtes permettant d'atteindre v à partir de u.

Dans le graphe proposé, il existe une chaîne entre chacun des sommets par conséquent le graphe Γ est connexe.
par exemple la chaine B-G-W-E-P-O-K-H passe par tous les sommets du graphe.

**1. b. Déterminer en justifiant si le graphe Γ est complet.**

> **Définition 3** (Graphe Simple et Complet)
> - Un *graphe simple* est un graphe sans boucle dont chaque couple de sommets est relié par au plus une arête.
> - Un graphe simple est dit *complet* si tous les sommets sont adjacents, c'est-à-dire s'il existe toujours une (et une seule) arête entre deux sommets disjoints.

Le graphe Γ n'est pas complet car par exemple les sommets B et P ne sont pas reliés par une arête.

**2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.**
Citons le théorème d'Euler

> **Théorème 2** (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736 )
> - Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
> - Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).
>
> **Remarque** : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

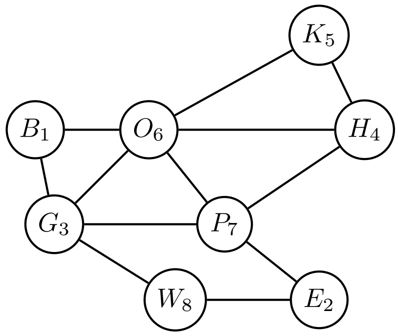
| Sommet | B | E | G | H | K | O | P | W |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 2 | 2 | 4 | 3 | 2 | 5 | 4 | 2 |

Donc deux sommets sont de degré impair, les sommets H et O. Par conséquent, d'après le théorème 2, ce graphe connexe admet une chaine eulérienne.

 ©ISSN 2272-5318 

**3. Donner la matrice d'adjacence $M$ du graphe $\Gamma$ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).**

> **Définition 4** (Matrice d'adjacence d'un graphe)
>
> Considérons un graphe G , d'ordre $n$. On numérote les sommets de G de 1 à $n$. On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice M dont chaque terme $a_{ij}$ est égal au nombre d'arêtes allant du sommet $i$ vers le sommet $j$.




L'ordre des sommets est B-E-G-H-K-O-P-W. On peut les numéroter sur le graphe cela aide énormément :

- Pas de boucle aux sommets donc tous les termes diagonaux $a_{ii}$ sont nuls.
- 1ère ligne de la matrice, à partir de $B_1$ : 2 arêtes vers $O_6$ et $G_3$ donc 0 pour tous les termes sauf $a_{13} = a_{16} = 1$.
- 2ème ligne de la matrice, à partir de $E_2$ : 2 arêtes vers $P_7$ et $W_8$ donc 0 pour tous les termes sauf $a_{27} = a_{28} = 1$.
- 3ème ligne de la matrice, à partir de $G_3$ : 4 arêtes vers $B_1, O_6, P_7$ et $W_8$
  donc 0 pour tous les termes sauf $a_{31} = a_{36} = a_{37} = a_{38} = 1$.
- etc ...

La matrice d'adjacence $M$ du graphe $\Gamma$ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique) est donc ici :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \text{ et on donne } M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 4 & 4 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 1 & \boxed{4} & 4 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 9 & 8 & 7 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & 8 & 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**4. Un touriste se trouve à la station Holborn. Il prévoit de se rendre à la station Green Park en utilisant exactement trois lignes de métro sur son trajet.**

**4. a. Sans utiliser le graphe, donner le nombre de trajets possibles et justifier la réponse.**

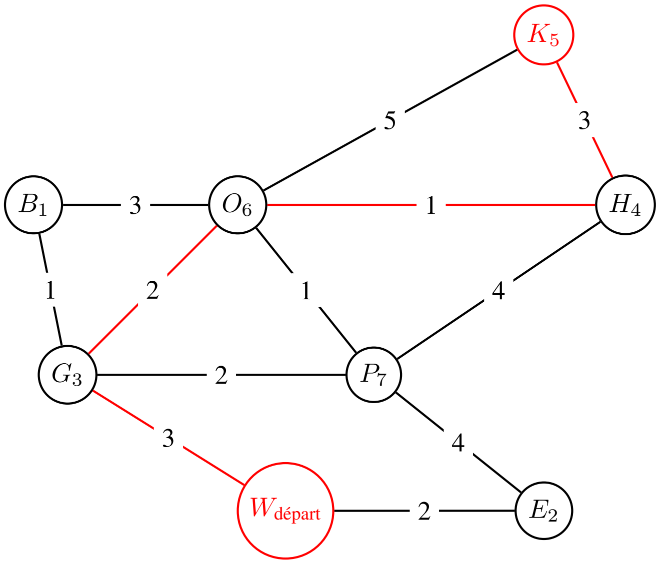
> **Propriété 2** (Matrice d'adjacence et nombre de chaînes)
>
> Si M est la matrice d'adjacence associée à un graphe dont les sommets sont numérotés et $p$ désigne un nombre entier naturel. Le terme $a_{ij}$ (ligne $i$ et colonne $j$) de la matrice $M^p$ donne le nombre de chaînes de longueur $p$ reliant $i$ à $j$.

D'près la propriété 2, le terme $b_{43} = 4$ de la matrice $M^3$ donne le nombre de chaînes de longueur $p = 3$ reliant $H_4$ à $G_3$.
Il y a donc 4 trajets possibles de la station Holborn $(H_4)$ à la station Green Park $(G_3)$ en utilisant exactement trois lignes de métro sur son trajet.

**4. b. Donner les trajets possibles .**

Les 4 trajets possibles sont :

$\boxed{H \longrightarrow O \longrightarrow P \longrightarrow G}$ ; $\boxed{H \longrightarrow K \longrightarrow O \longrightarrow G}$ ; $\boxed{H \longrightarrow P \longrightarrow O \longrightarrow G}$ et $\boxed{H \longrightarrow O \longrightarrow B \longrightarrow G}$




**Légende :**
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

**Sur le graphe pondéré ci-dessus, on a indiqué la durée, exprimée en minutes, des trajets entre chaque station (la durée est indiquée sur chaque arête du graphe $\Gamma$).**

**5. À partir de la station Westminster, ce touriste doit rejoindre la station King's Cross St Pancras le plus rapidement possible pour prendre un train.**
**En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet permettant de relier la station Westminster à la station King's Cross St Pancras en une durée minimale. On précisera cette durée.**
Pour cela appliquons l'algorithme de Dijkstra.

*Remarque : L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.*

| de .. à | à B | à E | à G | à H | à K | à O | à P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W$ | $\infty$ | **2W** | 3W | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $E(2W)$ | $\infty$ | - | **3W** | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 6E |
| $G(3W)$ | **4G** | - | - | $\infty$ | $\infty$ | 5G | 5G ~~6E~~ |
| $B(4G)$ | - | - | - | $\infty$ | $\infty$ | **5G** ~~7B~~ | 5G |
| $O(5G)$ | - | - | - | 6(O) | 10(O) | - | **5G** |
| $P(5G)$ | - | - | - | **6(O)** ~~9P~~ | 10(O) | - | - |
| $H(6(O))$ | - | - | - | - | ~~10(O)~~ **9H** | - | - |
| $K(9(H))$ | - | - | - | - | - | - | - |

Le chemin le plus court pour relier W à K est de longueur 9 minutes, c'est :

$$\boxed{W \xrightarrow{3} G \xrightarrow{2} O \xrightarrow{1} H \xrightarrow{3} K}$$

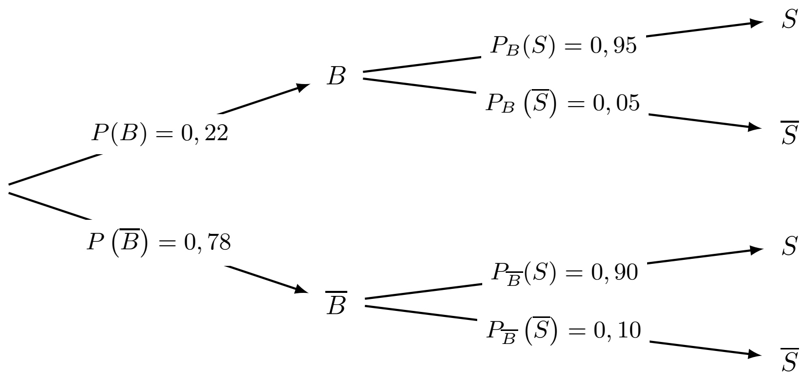
## Exercice 3. 5 points

**Commun à tous les candidats**

## Partie A

1. **Représenter la situation par un arbre pondéré.**
On note $B$ l'évènement « le fruit est issu de l'agriculture biologique » et $S$ l'évènement « le fruit est sélectionné pour la préparation des confitures ». De ce fait :

- $P(B) = 0,22$
car : « 22 % des fruits livrés sont issus de l'agriculture biologique » ;
- $P_B(S) = 0,95$
car : « parmi les fruits issus de l'agriculture biologique, 95 % sont sélectionnés pour la préparation des confitures » ;
- $P_{\overline{B}}(S) = 0,90$
car : « parmi les fruits non issus de l'agriculture biologique, 90 % sont sélectionnés pour la préparation des confitures ».




2. **Déterminer la probabilité que le fruit soit sélectionné pour la préparation des confitures et qu'il soit issu de l'agriculture biologique.**
On cherche $P(S \cap B)$ or :

$$P(S \cap B) = P_B(S) \times P(B)$$
$$P(S \cap B) = 0,95 \times 0,22$$
$$\boxed{P(S \cap B) = 0,209}$$

3. **Montrer que $P(S) = 0,911$.**
On cherche $P(S)$ or d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(S \cap B) + P\left(S \cap \overline{B}\right)$$
$$P(S) = 0,209 + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(S)$$
$$P(S) = 0,209 + 0,78 \times 0,9$$
$$\boxed{P(S) = 0,911 = 91,1\%}$$

4. **Sachant que le fruit a été sélectionné pour la préparation des confitures, déterminer la probabilité qu'il ne soit pas issu de l'agriculture biologique.**
On cherche $P_S\left(\overline{B}\right)$ or

$$P_S\left(\overline{B}\right) = \frac{P\left(\overline{B} \cap S\right)}{P(S)}$$
$$P_S\left(\overline{B}\right) = \frac{P_{\overline{B}}(S) \times P\left(\overline{B}\right)}{P(S)}$$
$$P_S\left(\overline{B}\right) = \frac{0,9 \times 0,78}{0,911}$$
$$\boxed{P_S\left(\overline{B}\right) \approx 0,771}$$

## Partie B

**1. On prélève un pot au hasard. Déterminer la probabilité que le pot soit commercialisé.**

Le pot de confiture est commercialisé si l'écart entre la masse affichée (c'est-à-dire 300 g) et la masse réelle ne dépasse pas 4 grammes. Puisque la variable aléatoire $X$ désigne la masse en gramme du pot, la probabilité que le pot soit commercialisé se traduit par :

$$P(300-4 \leq X \leq 300+4)$$

Or la variable $X$ suit la loi normale d'espérance $\mu = 300$ et d'écart-type $\sigma = 2$, la probabilité cherchée peut alors s'écrire :

$$P(300-4 \leq X \leq 300+4) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$$

On va alors appliquer la propriété suivante :

**Propriété 3** (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit $\mu$ un réel et $\sigma$ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire $X$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$\begin{aligned}
P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &\approx 0,683 \quad : (1)\\
P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &\approx 0,954 \quad : (2)\\
P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &\approx 0,997 \quad : (3)
\end{aligned}$$

La relation (2) de la propriété 3 nous donne alors la probabilité que le pot soit commercialisé :

$$\boxed{P(296 \leq X \leq 304) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954}$$

**2. Déterminer le réel $a$ tel que $p(X < a) = 0,01$.**

La calculatrice donne directement le résultat :

$$\boxed{p(X < a) = 0,01 \iff a \approx 295,347}$$

**Remarque** : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.invNorm}(0.01, 300, 2) \approx 295{,}347\,304\,246$$

## Partie C

La remarque ci-dessous indique que cette question est un exercice de recherche :
*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation*

**Le directeur commercial affirme que 90 % des consommateurs sont satisfaits de la qualité des produits commercialisés par son entreprise. On réalise une étude de satisfaction sur un échantillon de 130 personnes. Parmi les personnes interrogées, 15 déclarent ne pas être satisfaites des produits. Déterminer, en justifiant, si l'on doit remettre en question l'affirmation du directeur commercial.**

On va déterminer un intervalle de fluctuation et opérer un test, c'est assez classique.

- **1. Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de* $n = 130$ *personnes. Il est constaté que* 115 *d'entre elles sont satisfaites des produits (car 15 ne le sont pas).* ». Donc la fréquence observée de personnes satisfaites est

$$f = 115 \div 130 \approx 0{,}884615384 \text{ soit } \boxed{f \approx 0{,}885}$$

  - Le directeur affirme que $\underline{p = 90\%}$ des personnes sont satisfaites.

- **2. Intervalle de fluctuation** :

**Théorème 3** (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence $F_n$ d'un caractère dans un échantillon de taille $n$ est si $p$ désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[ p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 130$, $p = 90\ \%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 130 \geq 30 \\ \checkmark & np = 130 \times 0{,}9 = 117 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 130 \times 0{,}1 = 13 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[ p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0{,}9 - 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}9 \times 0{,}1}}{\sqrt{130}} \;;\; 0{,}9 + 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}9 \times 0{,}1}}{\sqrt{130}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}84843$ . On arrondit la borne inférieure par défaut $10^{-3}$ près soit $\underline{0{,}848}$.
- $p + 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}95157$ . On arrondit la borne supérieure par excès $10^{-3}$ près soit $\underline{0{,}952}$.

$$\boxed{I \approx [0{,}848 \;;\; 0{,}952]}$$

- **Conclusion**
  La fréquence observée appartient à l'intervalle, $f \approx 0{,}885 \in I$ donc le résultat du contrôle ne remet pas en question l'affirmation du directeur commercial (au seuil de 95%).

## Exercice 4. 6 points

**Commun à tous les candidats**

### Partie A

**On considère la fonction $f$ définie sur [1 ; 11] par : $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 15\ln x$.**

**1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 15}{x}$ où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$.**

La fonction $f$ est définie et dérivable sur [1 ; 11] comme somme et produit de fonctions qui le sont.

Sur [1 ; 11] la fonction $\ln$ est dérivable de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ce qui nous donne :

$$\forall x \in [1\ ;\ 11]\ ;\ f'(x) = -2 \times 0,5x + 2 + 15 \times \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = -x + 2 + \frac{15}{x}$$

Soit après mise au même dénominateur :

$$\boxed{\forall x \in [1\ ;\ 11]\ ;\ f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 15}{x}}$$

**2. Dresser le tableau de variations de $f$ sur l'intervalle [1 ; 11]. On donnera les valeurs exactes des éléments du tableau.**

On a montré que la dérivée de $f$ s'exprimait sous la forme d'un quotient de deux fonctions polynômes. Sur l'intervalle [1 ; 11] , le dénominateur, $x$, est strictement positif, donc le signe de $f'$ dépend uniquement du signe du numérateur $\left(-x^2 + 2x + 15\right)$.

- **Étude du signe du trinôme sur $\mathbb{R}$.**
  le trinôme du second degré $-x^2 + 2x + 15$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1\ ;\ b = 2\ ;\ c = 15$.

  $$\Delta = 64 > 0 \Rightarrow x_1 = -3 \text{ et } x_2 = 5$$

  Le signe du trinôme sur $\mathbb{R}$ est alors donnée par :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $5$ | | $11$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-x^2 + 2x + 15$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |

- **Étude du signe de la dérivée sur [1 ; 11] et variations de $f$.**
  En restreignant l'étude précédente à [1 ; 11] , on en déduit les variations de $f$ sur [1 ; 11] avec les valeurs aux bornes :

| $x$ | $1$ | $5$ | $11$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\dfrac{3}{2} = 1,5$ | $-\dfrac{5}{2} + 15\ln 5 \approx 21,64$ | $-\dfrac{77}{2} + 15\ln 11 \approx -2,53$ |

| $x$ | $1$ | | $5$ | | $11$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1.5$ | $\nearrow$ | $-\dfrac{5}{2} + 15\ln 5$ | $\searrow$ | $-\dfrac{77}{2} + 15\ln 11$ |

La fonction $f$ est donc croissante sur $[1\ ;\ 5]$ et décroissante sur $[5\ ;\ 11]$.

**3. 3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle [1 ; 11].**
On a :

| $x$ | 1 | | 5 | $\alpha$ | 11 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1.5$ | $\nearrow$ | $f(5) \approx 21.64$ | $\searrow$ 0 $\searrow$ | $f(11) \approx -2.53$ |

**Théorème 4** (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si $f$ est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

**Remarque** : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

**Sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$** :

- La fonction $f$ est strictement croissante sur cet intervalle avec $f(1) = 1,5$. Donc Le minimum de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$ est $1,5$, atteint pour $x = 1$
- De ce fait, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[1\ ;\ 5]$.

**Sur l'intervalle $[5\ ;\ 11]$ :**

- La fonction $f$ est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[5\ ;\ 11]$ ;
- L'image par $f$ de l'intervalle $[5\ ;\ 11]$ est $[f(11)\ ;\ g(5)]$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image car :

$$f(11) \approx -2,53 < 0 < f(5) \approx 21,64$$

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = k = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur l'intervalle $[5\ ;\ 11]$.

Pour conclure : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution dans [1 ; 11].

**3. b. Donner une valeur approchée de $\alpha$ à 0,01 près.**
Pour avoir un encadrement de $\alpha$, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0,1$ on obtient : $\begin{cases} f(10,6) & \approx & 0,43 > 0 \\ f(10,7) & \approx & -0,29 < 0 \end{cases}$, donc $10,6 \leq \alpha \leq 10,7$.
- Avec un pas de $\Delta = 0,01$ on obtient : $\begin{cases} f(10,65) & \approx & 0,07 > 0 \\ f(10,66) & \approx & -0,0003 < 0 \end{cases}$, donc $10,65 \leq \alpha \leq 10,66$.

Une valeur approchée de $\alpha$ à 0,01 près est donc $\alpha \approx 10,66$.

**3. c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$ dans l'intervalle [1 ; 11].**
En utilisant le tableau de variations on a donc :

| $x$ | 1 | | $\alpha$ | | 11 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

Donc $f$ est positive sur $[1\ ;\ \alpha[$, nulle en $\alpha$ et négative sur $]\alpha\ ;\ 11]$.

**4. 4. a. On considère la fonction $F$ définie sur [1 ; 11] par $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 15x + 15x\ln x$.**
**Montrer que $F$ est une primitive de la fonction $f$**
La fonction $F$ est dérivable sur $[1\ ;\ 11]$ comme somme et produit de fonctions qui le sont.

$$\begin{aligned}
\forall x \in [1\ ;\ 11]\ ;\ F'(x) &= \left(-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 15x\right)' + (15x\ln x)' \\
F'(x) &= -3 \times \frac{1}{6}x^2 + 2x - 15 + 15\,(x\ln x)' \\
F'(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 15 + (15x\ln x)'
\end{aligned}$$

Or par dérivation du produit : $(uv)' = u'v + uv'$ ; $u$ et $v$ dérivables sur $[1\ ;\ 11]$ avec $\begin{cases} u(x) = x & ; \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x & ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ F'(x) &= -0,5x^2 + 2x - 15 + 15 \times \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) \\
F'(x) &= -0,5x^2 + 2x - 15 + 15\ln x + 15
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [1\ ;\ 11]\ ;\ F'(x) = -0,5x^2 + 2x + 15\ln x = f(x)}$$

Donc $F$ est une primitive de la fonction $f$.

**4. b. Calculer $\int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera le résultat exact puis sa valeur arrondie au centième.**

$$\forall x \in [1\ ;\ 11]\ ;\ F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 15x + 15x\ln x$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
F(1) &= -\frac{1}{6} \times 1^3 + \underbrace{1^2 - 15 \times 1}_{-14} + \underbrace{15 \times 1\ln 1}_{0} \\
F(1) &= -\frac{1}{6} - 14 \\
F(1) &= -\frac{1 + 14 \times 6}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{F(1) = -\frac{85}{6}}$$

$$\begin{aligned}
F(11) &= -\frac{1}{6} \times 11^3 + \underbrace{11^2 - 15 \times 11}_{-44} + \underbrace{15 \times 11\ln 11}_{165\ln 11} \\
F(11) &= -\frac{11^3 + 44 \times 6}{6} + 165\ln 11
\end{aligned}$$

$$\boxed{F(11) = -\frac{1\,595}{6} + 165\ln 11}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\ F(x)\ \right]_1^{11} \\
&= F(11) - F(1) \\
&= -\frac{1\,595}{6} + 165\ln 11 + \frac{85}{6} \\
&= \frac{-1\,595 + 85}{6} + 165\ln 11 \\
&= -\frac{1\,510}{6} + 165\ln 11
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{755}{3} + 165\ln 11 \approx 143,99}$$

**4. c. En déduire la valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle [1 ; 11]. (On donnera la valeur arrondie au centième.)**
La valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle [1 ; 11] est donnée par :

$$\boxed{\frac{1}{11-1} \times \int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 14,40}$$

## Partie B

**Une société fabrique et vend des chaises de jardin. La capacité de production mensuelle est comprise entre 100 et 1 100 chaises. Le bénéfice mensuel réalisé par la société est modélisé par la fonction $f$ définie dans la partie A, où $x$ représente le nombre de centaines de chaises de jardin produites et vendues et $f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros.**

**1. Quelles quantités de chaises la société doit-elle produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel positif ?**

Nous avons montré lors de la question **A3b.** que la fonction f était positive sur $[1\,;\,\alpha]$ avec $\alpha \in ]10,65\,;\,10,66[$.

Ici $x$ représente le nombre de *centaines de chaises* produites et vendues, attention donc, on va considérer les valeurs entières pour répondre au problème modélisé.
Calculons les valeurs autour de $\alpha$, le nombre de chaises correspondant et le bénéfice en euros sachant que $f(x)$ est exprimé en *milliers d'euros*.

| $x$ | $10,65$ | $10,66$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\approx 0{,}072\,15$ | $\approx -0{,}000\,32$ |
| Nombre de chaises | 1 065 | 1 066 |
| Bénéfice en euros (arrondi au centième) | $1000 \times f(10,65) \approx 72,15$€ | $1000 \times f(10,66) \approx -0,32$€ |
| Gain ou perte | Bénéfice positif (gain) | Bénéfice négatif (perte) |

Pour obtenir un bénéfice mensuel positif, la société doit donc produire entre 100 et 1 065 chaises.

**2. Déterminer le nombre de chaises que la société doit produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.**

D'après l'étude menée lors de la question **A2.**, la fonction $f$ admet un maximum pour $x = 5$ Il faut donc que la société produise et vende 500 chaises pour obtenir un bénéfice maximum.
Ce bénéfice sera alors d'environ :

$$\boxed{1000 \times f(5) \approx 21\,641{,}57€}$$


©ISSN 2272-5318