Baccalauréat 2016 - ES/L
Nouvelle Calédonie

Série ES/L Obli. et Spé.
Mars 2016
Correction

Exercice 1. 5 points

Commun à tous les candidats

Question 1 (Réponse c)

La proportion de gauchers dans la population française est de 13 %. Un intervalle de fluctuation asymptotique, au seuil de 95 %, de la fréquence de gauchers dans un échantillon de 500 personnes prises au hasard dans la population française est (*les bornes de chaque intervalle sont données à* 10^{-3} *près*) :

a. [0,080 ; 0,180] **b.** [0,085 ; 0,175] **c.** [0,100 ; 0,160] **d.** [0,128 ; 0,132]

- **Analyse des données** :
  « La proportion de gauchers dans la population française est de $p = 13\,\%$. [...] dans un échantillon de $n = 500$ personnes »
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark \quad n \geq 30 \\ \checkmark \quad np \geq 5 \\ \checkmark \quad n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ;\ p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 500$, $p = 13\ \%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark \quad n = 500 \geq 30 \\ \checkmark \quad np = 500 \times 0{,}13 = 65 \geq 5 \\ \checkmark \quad n(1-p) = 500 \times 0{,}87 = 435 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}13 - 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}13 \times 0{,}87}}{\sqrt{500}} \ ;\ 0{,}13 + 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}13 \times 0{,}87}}{\sqrt{500}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}10052$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}1}$.
- $p + 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}15948$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}16}$.

$$\boxed{I_{500} \approx \left[0{,}1 \ ;\ 0{,}16\right]}$$

La bonne réponse est donc la réponse 1C.

Question 2 (Réponse d)

Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\ln x + \ln 3 \leqslant \ln(2x+1)$ est :

a. $[2\,;\,+\infty[$ **b.** $]0\,;\,2]$ **c.** $]-\infty\,;\,1]$ **d.** $]0\,;\,1]$

Propriété 1

Soient a et b deux réels strictement positif, on a : $\ln a + \ln b = \ln ab$.

Ensemble de définition :
L'équation est définie si x et $(2x+1)$ sont strictement positifs donc sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Résolution :
Pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$ on a :

$$\ln x + \ln 3 \leqslant \ln(2x+1) \underset{\text{Prop. (1)}}{\iff} \ln 3x \leqslant \ln(2x+1)$$

La fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

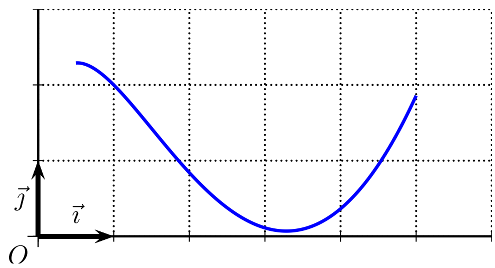
$$\begin{aligned}\ln x + \ln 3 \leqslant \ln(2x+1) &\iff \begin{cases} x > 0 \\ 3x \leqslant (2x+1) \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x > 0 \\ x \leqslant 1 \end{cases} \iff \boxed{x \in \,]0\,;\,1]}\end{aligned}$$

La bonne réponse est donc la réponse 2D.

Question 3 (Réponse d)

a. La fonction f est décroissante sur l'intervalle [0,5 ; 3].
b. La fonction f est convexe sur l'intervalle [0,5 ; 5].
c. La courbe représentant f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 2.
d. La fonction f est concave sur l'intervalle [0,5 ; 1,5].

La fonction f est définie sur l'intervalle [0,5 ; 5] par : $f(x) = x^2 - 3x\ln x + 1$.



La fonction f est dérivable sur son intervalle de définition comme somme et composées de fonctions qui le sont. Pour tout réel x de [0,5 ; 5] :

$$f'(x) = 2x - 3\ln x - 3x\frac{1}{x} = 2x - 3\ln x - 3$$

et donc

$$f''(x) = 2 - \frac{3}{x} = \frac{2x-3}{x}$$

Donc sur l'intervalle $[0,5\,;\,1,5]$, x étant positif strictement, la dérivée seconde est du signe de $(2x-3)$.
Or on a

$$2x - 3 = 0 \iff x = 1,5$$

Donc $f''(x) \leq 0$ sur $[0,5\,;\,1,5]$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle. La bonne réponse est donc la réponse 3D.

- **Rappel**.
En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite **convexe** (respectivement **concave**) si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe. De plus on a les propriétés suivantes :

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

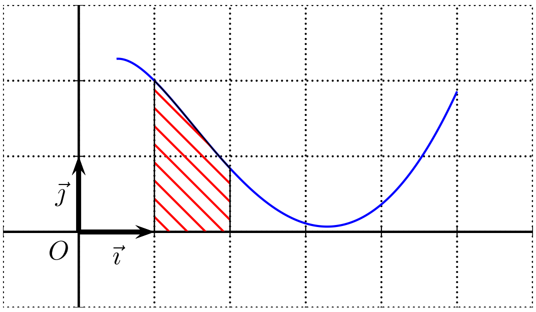
Proposition 2 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est convexe si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles**.
f est concave si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles**.

Question 4 (Réponse c)

On note I l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$; on peut affirmer que :

a. $0,5 \leqslant I \leqslant 1$ **b.** $4 \leqslant I \leqslant 7$ $\boxed{\textbf{c. } 1 \leqslant I \leqslant 1,75}$ **d.** $2 \leqslant I \leqslant 4$



la fonction f est bien continue et positive sur $[1\,;\,2]$ donc l'intégrale correspond à l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface hachurée sur le graphique. On peut alors encadrer cette aire facilement.

Question 5

On souhaite utiliser un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée au centième de la solution α de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle [1 ; 3]. (On admet que sur cet intervalle l'équation admet bien une unique solution.)

Question 5 (Réponse b)

a. L'algorithme 1 affiche une valeur approchée au centième de α.
$\boxed{\textbf{b. } \text{L'algorithme 2 affiche une valeur approchée au centième de } \alpha}$.
c. L'algorithme 3 affiche une valeur approchée au centième de α.
d. Aucun des trois algorithmes n'affiche de valeur approchée au centième de α.

L'algorithme 2 correspond à la recherche d'une solution d'équation par dichotomie.

Exercice 2. Obligatoire 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ou candidats de L

Un club de basketball a suivi sur plusieurs années l'évolution des abonnements annuels de ses supporters. Partant de ces observations, on décide de modéliser le nombre annuel d'abonnés sur la base d'un taux de réabonnement de 80 % d'une année sur l'autre auxquels s'ajoutent 300 nouveaux abonnements. Le nombre d'abonnés au club à la fin de l'année 2014 était 1 128. On note a_n, le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2014 + n$. On a donc $a_0 = 1\,128$.

1. Estimer le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2015.

De 2014 à 2015, le taux de réabonnement est de 80 % ;

$$1\,128 \times \frac{80}{100} = 902,4$$

Chaque année s'ajoutent 300 nouveaux abonnés donc

$$902,4 + 300 = 1\,202{,}4$$

Le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2015 est estimé à 1 202.

2. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,8a_n + 300$.

Pour tout entier n, a_n est le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2014 + n$. Donc a_{n+1}, le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2014 + n + 1$, est égal à 80 % des a_n abonnés l'année n, auxquels il faut aussi ajouter 300 nouveaux abonnés. On aura pour tout entier n :

$$\boxed{a_{n+1} = 0,8a_n + 300}$$

3. Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par : $u_n = 1\,500 - a_n$.

3. a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= a_{n+1} - 1\,500 \\
u_{n+1} &= (0{,}8\,a_n + 300) - 1\,500 \\
u_{n+1} &= 0{,}8 \times a_n - 1\,200 \\
u_{n+1} &= 0{,}8 \times \left(a_n + \frac{-1\,200}{0{,}8}\right) \\
u_{n+1} &= 0{,}8 \times (a_n - 1\,500) \\
u_{n+1} &= 0{,}8 \times u_n
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $u_0 = -372$ puisque :

$$\begin{aligned}
u_0 &= a_0 - 1\,500 \\
u_0 &= 1\,128 - 1\,500 \\
u_0 &= -372
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_0 & = -372 \\ u_{n+1} & = 0{,}8 \times u_n \end{cases} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. Exprimer u_n en fonction de n.

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $u_0 = -372$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = u_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = -372 \times (0{,}8)^n}$$

3. c. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $a_n = 1\,500 - 372 \times 0,8^n$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$u_n = a_n - 1\,500$$

On peut en déduire l'expression :

$$a_n = u_n + 1\,500$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ a_n = -372 \times (0{,}8)^n + 1\,500}$$

4. Résoudre algébriquement l'inéquation $a_n > 1\,450$ et interpréter le résultat obtenu.

Pour tout entier naturels n :

$$\begin{aligned} a_n > 1\,450 &\iff 1\,500 - 372 \times 0,8^n > 1\,450 \\ &\iff -372 \times 0,8^n > -50 \\ &\iff 0,8^n < \frac{50}{372} \end{aligned}$$

En composant par la fonction $\ln$ définie et croissante sur $]0\,;\ +\infty[$, on a :

$$a_n > 1\,450 \iff \ln 0,8^n < \ln \frac{50}{372}$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$a_n > 1\,450 \iff n \ln 0,8 < \ln \frac{50}{372}$$

En divisant chaque membre par $\ln 0,8 < 0$, l'ordre change et :

$$a_n > 1\,450 \iff n > \frac{\ln \frac{50}{372}}{\ln 0,8} \approx 8,99$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des <u>entiers naturels supérieurs ou égaux à 9</u>.
C'est à dire à partir de l'année $2014 + 9 =$ <u>2023, il y aura plus de 1 450 abonnés dans le club</u>.

5. La municipalité dont dépend le club de basketball prévoit de construire une nouvelle salle de sport pour accueillir les rencontres du club. On souhaite pouvoir accueillir tous les abonnés du club auxquels s'ajouteraient 500 spectateurs occasionnels non abonnés au club. En tenant compte des résultats précédents, combien de places de spectateurs au minimum doit-on prévoir dans cette salle ?

On sait que $u_n = 372 \times 0,8^n$, donc u_n est strictement positif. Or puisque $a_n = 1\,500 - u_n$, on a pour tout n : $a_n < 1\,500$

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Ici $-1 < q = 0,8 < 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n \to +\infty} -372 \times (0,8)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (a_n) définie par $a_n = 1\,500 - 372 \times 0,8^n$:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 1\,500}$$

Le nombre d'abonnés va tendre vers 1 500 en restant inférieur à 1 500. Comme il faut 500 places supplémentaires pour des spectateurs, <u>la municipalité devra construire une salle de 2 000 places</u> pour accueillir tout le monde.

Exercice 2. Spécialité — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Alphamarché. Les sondages mensuels ont permis de mettre en évidence que les arguments publicitaires font évoluer chaque mois la répartition. On décide de modéliser cette évolution en considérant que 10 % des personnes préférant Alphamarché et 15 % des personnes préférant Bétamarché changent d'avis d'un mois sur l'autre. Le mois du début de la campagne est noté mois 0.
Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité que le client interrogé préfère Alphamarché le mois n ;
- b_n la probabilité qu'il préfère Bétamarché le mois n ;
- $P_n = (a_n \ \ b_n)$ la matrice ligne désignant l'état probabiliste au mois n.

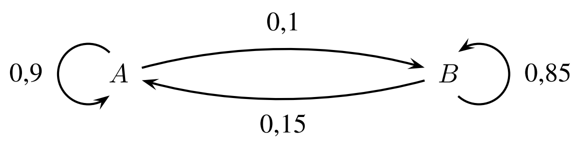
1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Alphamarché donc

$$a_0 = 0,2 \text{ et } b_0 = 1 - a_0 = 1 - 0,2 = 0,8$$

On a donc :

$$\boxed{P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}}$$

2. On note A, l'état « Le client interrogé préfère Alphamarché » et B l'état « Le client interrogé préfère Bétamarché ». Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.



3.

3. a. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

D'après le texte, on a : $\begin{cases} a_{n+1} &= 0,9\,a_n + 0,15\,b_n \\ b_{n+1} &= 0,1\,a_n + 0,85\,b_n \end{cases}$

Ce qui se traduit sous forme matricielle par : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

La matrice de transition de ce graphe est donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}}$$

3. b. Montrer que $P_1 = (0,3 \quad 0,7)$.

$$P_1 = P_0 \times M$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,2 \times 0,9 + 0,8 \times 0,15 & 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,85 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,18 + 0,12 & 0,02 + 0,68 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}}$$

©ISSN 2272-5318

4.

4. a. Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0, M et n.

D'après le cours, on peut dire que, pour tout n,

$$\boxed{P_n = P_0 \times M^n}$$

4. b. En déduire la matrice ligne P_3 et interpréter ce résultat.

On trouve à la calculatrice :

$$\boxed{P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}431\,25 & 0{,}568\,75 \end{pmatrix}}$$

Cela veut dire que le 3e mois, il y aura à peu près 43 % de clients qui choisiront Alphamarché, et 57 % qui choisiront Bétamarché.

5. Le service de retrait d'Alphamarché finira-t-il par être préféré à celui de Bétamarché ? Justifier.

D'après la calculatrice, la suite (a_n) semble croissante, et la suite (b_n) décroissante.

On trouve par ailleurs :

$$P_4 = P_0 \times M^4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}473\,4 & 0{,}526\,6 \end{pmatrix} \text{ et } P_5 = P_0 \times M^5 = \begin{pmatrix} 0{,}505\,1 & 0{,}494\,9 \end{pmatrix}$$

Donc, à partir du 5e mois, les clients préfèreront le retrait d'Alphamarché à celui de Bétamarché.

Exercice 3. 5 points

Commun à tous les candidats

Les 275 passagers d'un vol long-courrier s'apprêtent à embarquer dans un avion possédant 55 sièges en classe confort et 220 sièges en classe économique. Les voyageurs partent soit pour un séjour court, soit pour un séjour long. Parmi les passagers voyageant en classe économique, 35 % partent pour un séjour long alors que parmi les passagers ayant choisi la classe confort, 70 % ont opté pour un séjour long.

Partie A

On choisit au hasard un passager du vol. On note les évènements suivants :

- E : « Le passager voyage en classe économique. »et L : « Le passager part pour un séjour long. »

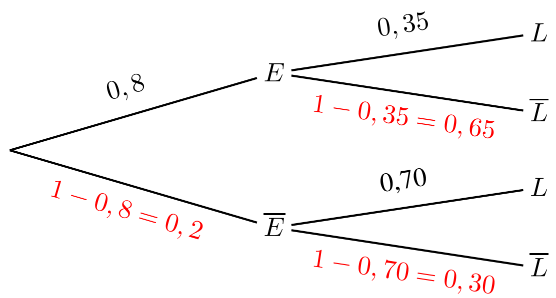
1. Déterminer la probabilité de l'évènement E, notée $p(E)$.
Sur 275 passagers, il y en a 220 qui voyagent en classe économique. Comme on choisit au hasard un passager du vol, il y a équiprobabilité, donc

$$\boxed{p(E) = \frac{220}{275} = 0,8}$$

2. Représenter la situation par un arbre pondéré. D'après le texte,

$$p_E(L) = 0,35 \text{ et } p_{\overline{E}}(L) = 0,70$$

.
On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



3. Déterminer la probabilité que le passager choisi parte en classe économique pour un séjour long.
La probabilité que le passager choisi parte en classe économique pour un séjour long est :

$$\boxed{p(E \cap L) = p(E) \times p_E(L) = 0,8 \times 0,35 = 0,28}$$

4. Montrer que $p(L) = 0,42$.
D'après la formule des probabilités totales :

$$p(L) = p(E \cap L) + p(\overline{E} \cap L) = 0,28 + 0,2 \times 0,7 = 0,28 + 0,14$$

Soit

$$\boxed{p(L) = 0,42}$$

5. On choisit au hasard un passager partant pour un long séjour. Quelle est la probabilité que ce passager voyage en classe économique ?
La probabilité que ce passager voyage en classe économique est :

$$\boxed{p_L(E) = \frac{p(E \cap L)}{p(L)} = \frac{0,28}{0,42} = \frac{2}{3}}$$

Partie B

Lors de l'embarquement, chaque passager enregistre un bagage qui sera placé dans la soute de l'avion pendant le vol. Le poids de ce bagage ne doit pas excéder 20 kg. Dans le cas où le poids de son bagage dépasserait 20 kg, le passager doit s'acquitter d'une « taxe d'excédent de bagage ». Le montant à payer en cas d'excédent est précisé dans le tableau ci-dessous.

Poids p (en kg) du bagage	Taxe d'excédent de bagage
$20 < p \leqslant 21$	12 €
$21 < p \leqslant 22$	24 €
$22 < p \leqslant 24$	50 €
$p > 24$	20 €/kg au-delà des 20 kg autorisés

On choisit au hasard un bagage devant être transporté dans la soute de l'avion. On admet que le poids de ce bagage, exprimé en kg, est modélisé par une variable aléatoire M qui suit la loi normale d'espérance $18,4$ et d'écart type $1,2$.

1. Calculer la probabilité que le passager propriétaire du bagage choisi s'acquitte d'une taxe d'excédent de bagage.

La probabilité cherchée est $p(M > 20)$ avec qui suit la loi normale d'espérance $18,4$ et d'écart type $1,2$. Or on a :

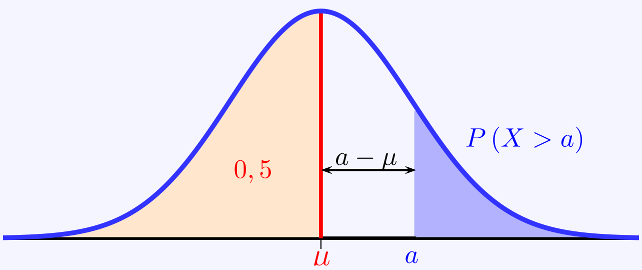
Propriété 2 $(P(X > a) \ ; \ a > \mu)$

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu \ ; \ \sigma^2\right)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$\boxed{P(X > a) = 0,5 - P(\mu < X < a)}$$



Donc

$$p(M > 20) = 0,5 - P(\mu = 18,4 < X < 20) \approx 0,091$$

La probabilité que le passager propriétaire du bagage choisi s'acquitte d'une taxe d'excédent de bagage est :

$$\boxed{p(M > 20) \approx 0,091}$$

2. Calculer la probabilité que le passager propriétaire du bagage s'acquitte d'une taxe d'excédent de bagage de 24 €.

La probabilité que le passager propriétaire du bagage choisi s'acquitte d'une taxe d'excédent de bagage de 24 € est :

$$\boxed{p(21 < M \leq 22) \approx 0,014}$$

Partie C

L'enregistrement des bagages des passagers est possible pendant une durée de 2 h. Un passager du vol est choisi au hasard et on note T la durée (en minutes] qui s'est écoulée entre le début des enregistrements des bagages et l'arrivée de ce passager au comptoir d'enregistrement. On admet que T est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 \ ; \ 120]$.

Déterminer la probabilité que le passager choisi enregistre ses bagages dans les 30 dernières minutes autorisées.

La probabilité que le passager choisi enregistre ses bagages dans les 30 dernières minutes autorisées est

$$\boxed{\frac{30}{120} = 0,25}$$

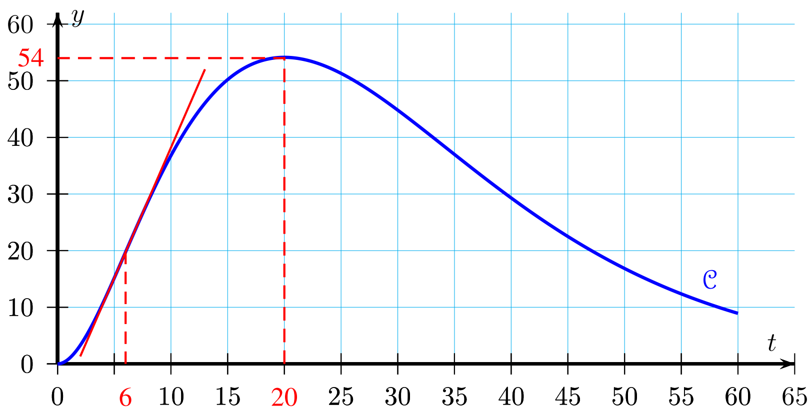
©ISSN 2272-5318

Exercice 4. 5 points

Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente le nombre de personnes malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie en fonction du nombre t de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.

Partie A



1. **À l'aide du graphique, déterminer au bout de combien de jours le nombre de malades est maximal puis préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là.**
On peut estimer que le nombre de malades est maximal au bout de 20 jours ; le nombre approximatif de malades est de 54 milliers.

2. **Estimer graphiquement le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus forte. (Expliquer rapidement la démarche utilisée)**.
La vitesse de propagation est la plus forte quand le coefficient directeur de la tangente à la courbe est le plus grand.
C'est autour du 6e jour.

Partie B

On modélise le nombre de malades (en milliers) en fonction du temps, à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 60] par : $f(t) = t^2e^{-0,1t}$ où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie. Pour étudier les propriétés de la fonction f, on a utilisé un logiciel de calcul formel qui a fourni les résultats suivants :

- $f'(t) = 0,1t(20-t)\mathrm{e}^{-0,1t}$
- $f''(t) = \left(0,01t^2 - 0,4t + 2\right)\mathrm{e}^{-0,1t}$
- $F(t) = \left(-10t^2 - 200t - 2\,000\right)\mathrm{e}^{-0,1t}$

1. **Démontrer le résultat : $f'(t) = 0,1t(20-t)\mathrm{e}^{-0,1t}$ qui a été fourni par le logiciel.**

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0\,;\,60] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = t^2 \times \mathrm{e}^{-0,1t} \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,60]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v+uv'$ avec :

$$\forall t \in [0\,;\,60]\ ;\ f(x) = u(x)\times v(x) + 2\ \ :\ \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = t^2 & ; & u'(x) = 2t \\ v(x) = \mathrm{e}^{-0,1t} & ; & v'(x) = -0,1\,\mathrm{e}^{-0,1t} \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;\,60]\,,\ \ f'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) \\ f'(x) &= 2t\times \mathrm{e}^{-0,1t} + t^2 \times \left(-0,1\,\mathrm{e}^{-0,1t}\right) \\ f'(t) &= \mathrm{e}^{-0,1t}\left(2t - 0,1t^2\right) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall t \in [0\,;\,60]\ ;\ f'(t) = 0,1t\,(20-t)\,\mathrm{e}^{-0,1t}}$$

2.

2. a. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur [0 ; 60].

Pour tout réel t, $\mathrm{e}^{-0,1t} > 0$ et $0,1t \geqslant 0$ sur $[0\,;\,60]$; donc $f'(t)$ est du signe de $20-t$ donc positif avant 20 et négatif après.
On a facilement par ailleurs :

$$f'(t) = 0 \iff \Big(t=0\Big) \text{ ou } \Big(t=20\Big)$$

En conséquence :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f'(t) > 0 \iff t \in \,]0\,;\,20[\\ f'(t) = 0 \iff \Big(t=0\Big) \text{ ou } \Big(t=20\Big) \end{array}\right\} \implies \quad f'(t) < 0 \iff t \in \,]20\,;\,60]}$$

2. b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 60].

$$f(0) = 0\ ;\ f(20) = 400\,\mathrm{e}^{-2} \approx 54,13 \text{ et } f(60) = 3\,600\,\mathrm{e}^{-6} \approx 8,92$$

Le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,60]$ est :

x	0		20		60
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$400\,\mathrm{e}^{-2}$	↘	$3\,600\,\mathrm{e}^{-6}$

3. Le nombre moyen de malades par jour, en milliers, durant les 60 premiers jours après l'apparition de la maladie est donné par $N = \dfrac{1}{60}\displaystyle\int_0^{60} f(t)\ \mathrm{d}\,t$.

3. a. Déterminer la valeur exacte de N.

La fonction F est une primitive de la fonction f donc :

$$\int_0^{60} f(t)\ \mathrm{d}\,t = F(60) - F(0)$$

$$F(60) = -50\,000\,\mathrm{e}^{-6} \text{ et } F(0) = -2\,000$$

Donc

$$\int_0^{60} f(t)\ \mathrm{d}\,t = -50\,000\,\mathrm{e}^{-6} + 2\,000$$

Soit

$$\boxed{N = \frac{1}{60}\left(-50\,000\,\mathrm{e}^{-6} + 2\,000\right) = \frac{1}{3}\left(100 - 2\,500\,\mathrm{e}^{-6}\right)}$$

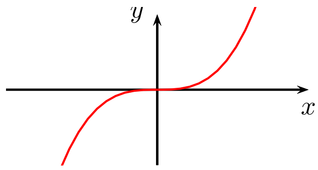
3. b. Quel est le nombre moyen de malades par jour, arrondi à la dizaine ?

On a $N \approx 31,268$; cela correspond au nombre moyen de malades en milliers, donc le nombre moyen de malades par jour, arrondi à la dizaine, est de 31 270.

4. 4. a. Justifier par le calcul que, sur l'intervalle [0 ; 15], la courbe représentative de la fonction f admet un unique point d'inflexion. Préciser une valeur arrondie à l'unité de l'abscisse de ce point d'inflexion

Définition 1 (Point d'inflexion d'une fonction numérique)

- Si, en un point de la courbe représentative d'une fonction continue, la concavité passe du type « convexe » au type « concave » (ou l'inverse), on appelle ce point, **point d'inflexion de la courbe**.
- Graphiquement, un point d'inflexion est un point où la tangente coupe la courbe.
- En un point d'inflexion, **la dérivée seconde, si elle existe, s'annule et change de signe**.



Représentation graphique de la fonction

$$x \mapsto x^3$$

montrant un point d'inflexion aux coordonnées $(0, 0)$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse t_0 si la dérivée seconde f'' s'annule et change de signe en t_0.

$$\begin{aligned} f''(t) = 0 &\iff \left(0,01t^2 - 0,4t + 2\right) \text{e}^{-0,1t} = 0 \\ &\iff 0,01t^2 - 0,4t + 2 = 0 \\ &\iff t^2 - 40t + 200 = 0 \end{aligned}$$

On obtient une équation du second degré en t de la forme $at^2 + bt + c = 0$ avec $a = 1$; $b = -40$; $c = 200$. On a alors

$$\Delta = 40^2 - 4 \times 1 \times 200 = 800 > 0$$

Donc l'équation admet deux solutions :

$$t_2 = \frac{40 + \sqrt{800}}{2} = \frac{40 + 20\sqrt{2}}{2} = 20 + 10\sqrt{2} \approx 34,14 > 15 \text{ et } t_1 = 20 - 10\sqrt{2} \approx 5,85 < 15$$

On étudie le signe de $f''(t)$ sur $[0 ; 60]$:

t	0		$20 - 10\sqrt{2}$		15		$20 + 10\sqrt{2}$		60
$f''(t)$		$+$	0		$-$		0	$+$	

La fonction f'' s'annule en changeant de signe en t_1. C'est le seul point d'inflexion de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 15]$. La courbe $\mathscr{C}$ admet donc un seul point d'inflexion d'abscisse $\underline{20 - 10\sqrt{2} \approx 5,85 \text{ soit 6 arrondi à l'unité}}$.

4. b. Donner une interprétation concrète de cette abscisse.

Un point d'inflexion correspond à un changement de convexité de la courbe.

- Pour tout t de l'intervalle $\left[0 ; 20 - 10\sqrt{2}\right[$ on a : $f''(t) > 0$, donc la fonction f est convexe sur $\left[0 ; 20 - 10\sqrt{2}\right[$.
- Pour tout t de l'intervalle $\left]20 - 10\sqrt{2} ; 15\right]$ on a : $f''(t) < 0$, donc la fonction f est concave sur $\left]20 - 10\sqrt{2} ; 15\right]$.

Cette abscisse du point d'inflexion correspond donc au moment où la fonction passe de convexe à concave, ce qui signifie que la propagation de la maladie commence à décroitre.