

∞ Corrigé du baccalauréat ES/L Centres étrangers ∞ 1^{er} juin 2016

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. Comme somme de fonctions dérivables sur $I =]0; +\infty[$, f est dérivable sur I , et pour tout réel x de I ,

$$f'(x) = 0 - 1 + 2 \times \frac{1}{x} = -1 + \frac{2}{x} = \frac{-x+2}{x}.$$

La bonne réponse est la **réponse c.**.

2. Sur l'intervalle $]0; 10]$, $f'(a) = 0$ lorsque la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses.

C'est le cas une seule fois dans ce cas.

La bonne réponse est donc la **réponse b.**.

3. Comme f est dérivable sur I , elle l'est en 4 et T admet pour équation $y = f'(4)(x - 4) + f(4)$.

Or, ici, $f(4) = 5 - 4 + 2\ln(4) = 1 + 2\ln(4)$ et $f'(4) = \frac{-4+2}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$.

La tangente T admet donc pour équation : $y = \frac{-1}{2}(x - 4) + 1 + 2\ln(4)$, soit $y = -\frac{1}{2}x + 3 + 2\ln(4)$.

La bonne réponse est la **réponse d.**.

4. Comme f est positive sur l'intervalle $[1; 3]$, $\int_1^3 f(x) dx$ est l'aire du domaine délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

On sait que, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = \frac{-x+2}{x}$.

On obtient donc le tableau suivant :

x	0	1	2	3	$+\infty$
$-x+2$		+	0	-	
x	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	-	
Variations de f		↘	↗	↘	

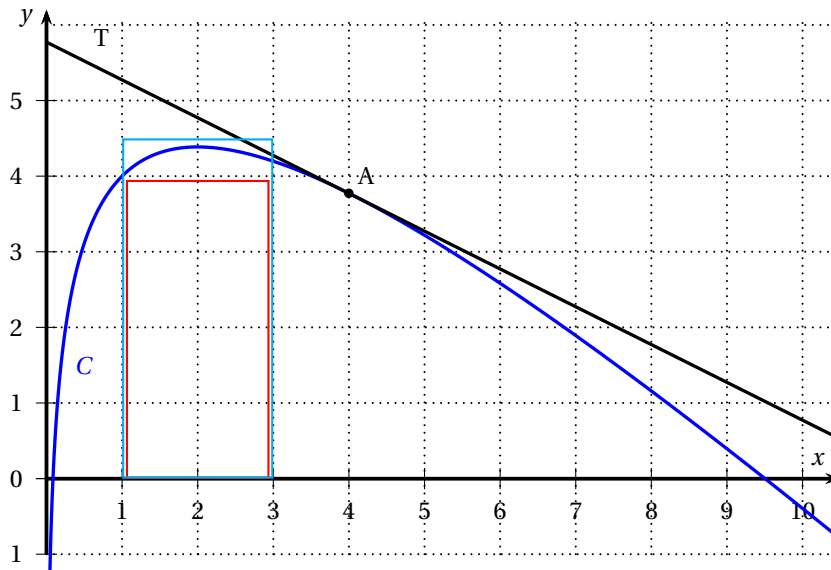
La fonction f a donc un maximum $f(2) = 5 - 2 + 2\ln 2 = 3 + 2\ln 2 \approx 4,386 < 4,5$.

De plus $f(3) = 5 - 3 + 2\ln(3) = 2 + 2\ln(3) \approx 4,20 > 4$.

Ainsi, sur l'intervalle $[1; 3]$, on a $4 \leq f(x) \leq 4,5$.

Donc cette intégrale est comprise entre l'aire de la surface grise (2×4) et l'aire de la surface hachurée ($2 \times 4,5$).

Graphiquement, cette intégrale est comprise entre l'aire rouge et l'aire bleue.



On a donc $8 \leq \int_1^3 f(x)dx \leq 9$.

La bonne réponse est la **réponse c.**

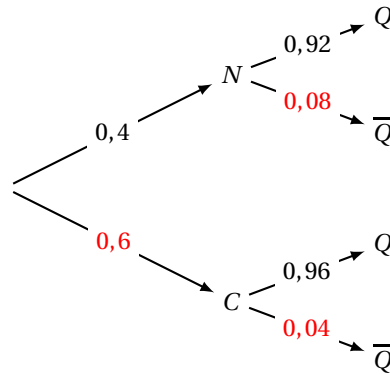
EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Voici un arbre qui convient. Les informations tirées de l'énoncé sont en noir.



2. $p(N \cap Q) = p(N) \times p_N(Q)$

$p(N \cap Q) = 0,4 \times 0,92$

$p(N \cap Q) = 0,368$.

En prenant un pneu au hasard dans le stock, la probabilité de choisir un pneu neige qui a réussi les tests de qualité est de 0,368.

3. Les événements N et C forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales,

$p(Q) = p(N \cap Q) + p(C \cap Q)$

$p(Q) = p(N \cap Q) + p(C) \times p_C(Q)$

$p(Q) = 0,368 + 0,6 \times 0,96$

$p(Q) = 0,944$.

4. On cherche $p_Q(N)$.

$$\text{Or, } p_Q(N) = \frac{p(N \cap Q)}{p(Q)}$$

$$p_Q(N) = \frac{0,368}{0,944}$$

$$p_Q(N) \approx 0,390.$$

Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, la probabilité que ce pneu soit un pneu neige est environ de 0,390.

Partie B

1. On cherche $p(X < 25)$.

★ Première méthode

On sait que $p(X < 25) = p(X < 30) - p(25 < X < 30) = 0,5 - p(25 < X < 30)$.

En déterminant $p(25 < X < 30)$ avec la calculatrice, cela donne :

$$p(X < 25) \approx 0,266$$

★ Deuxième méthode

En remplaçant $p(X < 25)$ par $p(-10^{99} < X < 25)$, on obtient le même résultat.

★ Conclusion

La probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres est environ de 0,266.

2. On cherche le réel d vérifiant $p(X > d) = 0,2$.

Or, $p(X > d) = 1 - p(X \leq d)$, donc $p(X > d) = 0,2$ équivaut à $p(X \leq d) = 0,8$.

La calculatrice donne $d \approx 36,733$.

Partie C

Posons $n = 900$ et $p = 0,85$.

Alors $n \geq 30$, $np = 900 \times 0,85 = 765 \geq 5$ et $n(1-p) = 900 \times 0,15 = 135 \geq 5$.

Supposons que le taux de satisfaction reste le même que celui de l'année précédente.

En choisissant un échantillon aléatoire de 900 personnes parmi les clients, on a donc une probabilité de 95% d'avoir une fréquence, sur l'échantillon, de clients satisfaits appartenant à l'intervalle

$$\left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Or, $p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,826$ (arrondi par défaut) et $p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,874$ (arrondi par excès).

Sous l'hypothèse d'un taux de satisfaction maintenu, on obtient comme intervalle de fluctuation asymptotique pour la fréquence de clients satisfaits sur un échantillon de 900 personnes l'intervalle $[0,826 ; 0,874]$.

Sur l'échantillon, la fréquence de clients satisfaits est $f = \frac{735}{900} \approx 0,817$.

$f \notin [0,826 ; 0,874]$.

On rejette donc, au seuil de 95 %, l'hypothèse d'un taux de satisfaction maintenu.

EXERCICE 3

5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Partie A

1. Augmenter de 6% revient à multiplier par 1,06.

La raison de la suite géométrique $(u_n)_{n \geq 0}$ est $q = 1,06$.

$$u_1 = u_0 \times 1,06 = 500 \times 1,06 = 530$$

$$u_2 = u_1 \times 1,06 = 530 \times 1,06 = 561,8 \approx 562$$

2. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ étant géométrique de raison $q = 1,06$, on a, pour tout entier naturel n :
 $u_n = u_0 \times q^n$, soit $u_n = 500 \times 1,06^n$.
3. Comme $u_0 > 0$ et $q > 1$, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Partie B

1. Voici les lignes L3, L5 et L7 complétées :

L3 : **Traitement** Tant que $U < 1000$
 L5 : Affecter à U la valeur $U \times 1,06$
 L7 : **Sortie** Afficher N

2. On cherche le premier entier n vérifiant $u_n \geq 1000$.

$$\begin{aligned} \text{Or, pour tout entier naturel } n, u_n \geq 1000 &\iff 500 \times 1,06^n \geq 1000 \\ &\iff 1,06^n \geq 2 \\ &\iff \ln(1,06^n) \geq \ln(2) \\ &\iff n \ln(1,06) \geq \ln(2) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,06)}, \text{ car } \ln(1,06) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \frac{\ln(2)}{\ln(1,06)} \approx 11,90.$$

C'est donc à partir du 12^e mois que le nombre de films proposés dépassera le double du nombre de films proposés à l'ouverture.

Partie C

1. Diminuer de 10 % revient à multiplier par 0,9.

Ainsi, on a bien, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2500$.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 25000$.

$$\begin{aligned} \text{a. Pour tout entier naturel } n, w_{n+1} &= v_{n+1} - 25000 \\ &= 0,9v_n + 2500 - 25000 \\ &= 0,9v_n - 22500 \\ &= 0,9 \left(v_n - \frac{22500}{0,9} \right) \\ &= 0,9(v_n - 25000) \\ &= 0,9w_n \end{aligned}$$

La suite $(w_n)_{n \geq 0}$ est donc bien une suite géométrique de raison $a = 0,9$.

Son premier terme est $w_0 = v_0 - 25000 = 15000 - 25000 = -10000$.

- b. La suite $(w_n)_{n \geq 0}$ étant géométrique, on a pour tout entier naturel n :

$$w_n = w_0 \times a^n, \text{ soit } w_n = -10000 \times 0,9^n.$$

Comme, pour tout entier naturel n , on a $w_n = v_n - 25000$, on obtient :

$$v_n = w_n + 25000, \text{ soit } v_n = 25000 - 10000 \times 0,9^n.$$

- c. Comme $0 < a < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,9^n) = 0$.

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 25000$.

Le nombre d'abonnés va donc se stabiliser, sur le long terme, autour de 25000.

EXERCICE 3**5 points****Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A**

1. **a.** Le graphe Γ n'est pas complet, car par exemple, les sommets D et H ne sont pas adjacents.
b. Le graphe Γ est connexe.
 Deux sommets quelconques du graphe peuvent, par exemple, être reliés par une chaîne extraite de celle-ci :

$$A - B - C - D - E - H - G - F$$

2. Voici les degrés des différents sommets du graphe Γ :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	3	4	3	4	3	2	3	2

Le graphe Γ , qui est connexe, possède 4 sommets de degré impair.

D'après le théorème d'Euler, ce graphe ne possède donc pas de chaîne eulérienne.

3. La matrice d'adjacence cherchée est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. **a.** ★ Le coefficient (2,8) de la matrice M est 0 ; on ne peut donc pas se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H en un seul vol.
 ★ Le coefficient (2,8) de la matrice M^2 est 0 ; on ne peut donc pas se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H en deux vols.
 ★ Le coefficient (2,8) de la matrice M^3 est 4 ; on peut donc se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H en trois vols et il y a même 4 possibilités.
 Le nombre minimal de vols pour se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H est donc 3.

- b.** Voici les trajets possibles :

$$B - A - E - H \ ; \ B - D - E - H \ ; \ B - C - G - H \ ; \ B - F - G - H$$

Partie B

Voici l'algorithme de Dijkstra utilisé sur ce graphe :

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	0+40 40(A)	∞	0+100 100(A)	0+45 45(A)	∞	∞	∞	B
		40+110 150(B)	40+50 90(B)	45(A)	40+120 160(B)	∞	∞	E
		150(B)	45+40 85(E)		160(B)	∞	45+90 135(E)	D
		85+160 145(D)			160(B)	∞	135(E)	H
		145(D)			160(B)	135+80 215(H)		C
					160(B)	145+50 195(C)		F
						160+55 195(C)		G

Le trajet le moins cher est donc le trajet $A - E - D - C - H$ et coûte 195€.

EXERCICE 4**5 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

1. $f = 0,4 \frac{1}{v} + 0,4$ avec, pour tout $x \in I = [0; 8]$, $v(x) = 20 e^{-x} + 1$.

La fonction v est dérivable et strictement positive sur I .

Par conséquent, la fonction $\frac{1}{v}$, puis f sont également dérivables sur I .

$$f' = 0,4 \times \left(\frac{-v'}{v^2} \right) + 0, \text{ avec pour tout } x \in I, v'(x) = 20 \times (-e^{-x}) = -20 e^{-x}.$$

$$\text{Donc, pour tout } x \in I, f'(x) = 0,4 \times \frac{-(-20 e^{-x})}{(20 e^{-x} + 1)^2} = \frac{8 e^{-x}}{(20 e^{-x} + 1)^2}.$$

2. Le logiciel de calcul formel donne $g(x) = f''(x) = 8 e^{-x} \times \frac{20 e^{-x} - 1}{(20 e^{-x} + 1)^3}$.

Pour tout réel x , $8 e^{-x} > 0$ et $(20 e^{-x})^3 > 0$, donc le signe de $g(x)$ est le même que celui de $20 e^{-x} - 1$.

Or pour tout réel x , $20 e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow 20 e^{-x} > 1$

$$\Leftrightarrow e^{-x} > \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow -x > \ln\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$\Leftrightarrow -x > -\ln(20)$$

$$\Leftrightarrow x < \ln(20)$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	0	$\ln(20)$	8
$f''(x)$	+	0	-
Convexité de f	Convexe		Concave

La fonction f est donc convexe sur l'intervalle $[0; 8]$.

Partie B**Proposition 1**

L'altitude du village B est 0,6 km : fausse.

$$f(8) = \frac{0,4}{20 \times e^{-8} + 1} + 0,4 \approx 0,797.$$

L'altitude du village B est environ de 0,797 km.

Proposition 2

L'écart d'altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre : vraie.

$$f(8) - f(0) = \frac{0,4}{20 \times e^{-8} + 1} + 0,4 - \left(\frac{0,4}{20 \times e^0 + 1} + 0,4 \right) \approx 0,378.$$

L'écart d'altitude entre les villages A et B est bien environ de 378 mètres.

Proposition 3

La pente en A vaut environ 1,8 % : vraie.

$$f'(0) = \frac{8e^0}{(20e^0 + 1)^2} = \frac{8}{441} \approx 0,018 = 1,8\%.$$

La pente en A vaut bien environ 1,8 %.

Proposition 4

Le projet de route ne sera pas accepté : fausse.

Le maximum de f' est atteint en $x = \ln 20$, car f change de convexité en $\ln 20$ en passant de convexe à concave.

$$\text{Or, } f'(\ln 20) = \frac{8e^{-\ln 20}}{(20e^{-\ln 20} + 1)^2} = \frac{\frac{8}{20}}{2^2} \approx 0,1 = 10\% < 12\%.$$

Par conséquent, la pente de la route sera toujours inférieure à 12 %.