Corrigé du baccalauréat ES – Polynésie – 10 juin 2016

EXERCICE 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

On s'intéresse à l'ensemble des demandes de prêts immobiliers auprès de trois grandes banques.
Une étude montre que 42 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Karl, 35 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Lofa, alors que cette proportion est de 23 % pour la banque Miro.
Par ailleurs :

- 76 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Karl sont acceptées ;
- 65 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Lofa sont acceptées ;
- 82 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Miro sont acceptées.

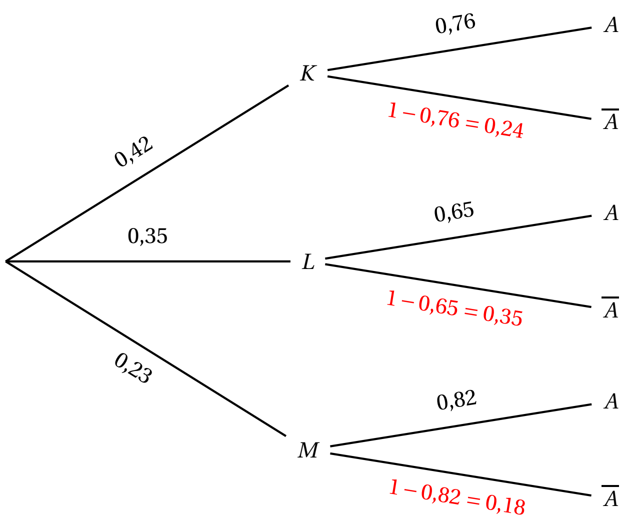
On choisit au hasard une demande de prêt immobilier parmi celles déposées auprès des trois banques.
On considère les évènements suivants :

- K : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Karl » ;
- L : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Lofa » ;
- M : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Miro » ;
- A : « la demande de prêt est acceptée ».

On rappelle que pour tout évènement E, on note $P(E)$ sa probabilité et on désigne par $\overline{E}$ son événement contraire.

Partie A

1. On construit un arbre pondéré illustrant la situation :



2. L'événement « le prêt est déposé auprès de la banque Karl et il est accepté » est l'événement $K \cap A$.
D'après l'arbre : $P(K \cap A) = P(K) \times P_K(A) = 0,42 \times 0,76 = 0,3192$

3. D'après la formule des probabilités totales :
$P(A) = P(K \cap A) + P(L \cap A) + P(M \cap A) = P(K) \times P_K(A) + P(L) \times P_L(A) + P(M) \times P_M(A)$
$= 0,42 \times 0,76 + 0,35 \times 0,65 + 0,23 \times 0,82 = 0,3192 + 0,2275 + 0,1886 = 0,7353 \approx 0,735$

4. La demande de prêt est acceptée. La probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro e = st $P_A(M)$:
$P_A(M) = \dfrac{P(M \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,23 \times 0,82}{0,7353} \approx 0,256$
Remarque – Si on prend comme valeur de $P(A)$ la valeur approchée 0,735 donnée par le texte, on obtient pour valeur approchée de $P_A(M)$ le nombre 0,257.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la durée moyenne d'un prêt immobilier.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque prêt immobilier, associe sa durée, en années.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 20$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

1. La probabilité que la durée d'un prêt soit comprise entre 13 et 27 ans est $P(13 \leqslant X \leqslant 27)$.
   Pour calculer cette probabilité, on peut remarquer que $13 = 20 - 7 = \mu - \sigma$ et que $27 = 20 + 7 = \mu + \sigma$; de plus, le cours donne le résultat, pour toute variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres μ et σ : $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}683$.
   La probabilité que la durée d'un prêt soit comprise entre 13 et 27 ans est d'environ 0,683.
   Remarque – On peut également utiliser la calculatrice pour trouver ce résultat.
2. On cherche une valeur approchée à 0,01 près du nombre réel a tel que $P(X > a) = 0{,}1$.
   Or $P(X \leqslant a) = 1 - P(X > a) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ donc on cherche a tel que $P(X \leqslant a) = 0{,}9$.
   Ce résultat est donné par la calculatrice : $a \approx 28{,}97$.
   En considérant que la durée d'un prêt est un nombre entier d'années, on peut dire que la probabilité que la durée du prêt soit au moins de 29 ans est égale à 0,1.

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 7 points

Une entreprise s'intéresse au nombre d'écrans 3D qu'elle a vendus depuis 2010 :

Année	2010	2011	2012
Nombre d'écrans 3D vendus	0	5 000	11 000

Le nombre d'écrans 3D vendus par l'entreprise l'année $(2010+n)$ est modélisé par une suite (u_n), arithmético-géométrique, de premier terme $u_0 = 0$.
On rappelle qu'une suite arithmético-géométrique vérifie, pour tout entier naturel n, une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a \times u_n + b$ où a et b sont deux réels.

1. **a.** On suppose que $u_1 = 5000$.
   $u_1 = au_0 + b = a \times 0 + b = b$; or $u_1 = 5000$ donc $b = 5000$.
   Donc, pour tout n, $u_{n+1} = au_n + 5000$

   b. On suppose de plus que $u_2 = 11000$.
   $u_2 = au_1 + 5000 = a \times 5000 + 5000$
   Or $u_2 = 11000$ donc $11000 = a \times 5000 + 5000 \iff 6000 = a \times 5000 \iff a = 1{,}2$
   Donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2 \times u_n + 5000$
2. **a.** $u_3 = 1{,}2 \times u_2 + 5000 = 1{,}2 \times 11000 + 5000 = 18200$
   $u_4 = 1{,}2 \times u_3 + 5000 = 1{,}2 \times 18200 + 5000 = 26840$

   b. En 2013 et 2014, l'entreprise a vendu respectivement 18 000 et 27 000 écrans 3D.
   Pour 2013, le nombre $u_3 = 18200$ est proche de 18 000.
   Pour 2014, le nombre $u_4 = 26840$ est proche de 27 000.
   Donc la modélisation semble pertinente.

   Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que le modèle est une bonne estimation du nombre d'écrans 3D que l'entreprise va vendre jusqu'en 2022.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout n par : $v_n = u_n + 25000$; donc $u_n = v_n - 25000$.

a. Pour tout entier naturel n,
$v_{n+1} = u_{n+1}+25\,000 = 1{,}2u_n+5\,000+25\,000 = 1{,}2(v_n-25\,000)+30\,000 = 1{,}2v_n-30\,000+30\,000 = 1{,}2v_n$
$v_0 = u_0 + 25\,000 = 0 + 25\,000 = 25\,000$
Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 25\,000$ et de raison $q = 1{,}2$.
On peut en déduire que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 25\,000 \times 1{,}2^n$.

b. On sait que, pour tout n, $v_n = 25\,000 \times 1{,}2^n$; on a déjà vu que, pour tout n, $u_n = v_n - 25\,000$.
On peut donc en déduire que, pour tout n, $u_n = 25\,000 \times 1{,}2^n - 25\,000$.

4. On souhaite connaître la première année pour laquelle le nombre de ventes d'écrans 3D dépassera 180 000 unités.

a.
$$\begin{aligned} u_n > 180\,000 &\iff 25\,000 \times 1{,}2^n - 25\,000 > 180\,000 \\ &\iff 25\,000 \times 1{,}2^n > 205\,000 \\ &\iff 1{,}2^n > \frac{205\,000}{25\,000} \\ &\iff 1{,}2^n > 8{,}2 \end{aligned}$$

b. On complète l'algorithme ci-dessous pour qu'il détermine et affiche le plus petit entier naturel n, solution de l'inéquation $1{,}2^n > 8{,}2$:

Variables :	N est un entier naturel
	W est un nombre réel
Initialisation :	N prend la valeur 0
	W prend la valeur 1
Traitement :	Tant que $W \leqslant 8{,}2$
	W prend la valeur $W \times 1{,}2$
	N prend la valeur $N + 1$
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N

Explications
On cherche la première valeur de n, représentée par N dans l'algorithme, telle que $1{,}2^n$, représenté par W, soit strictement supérieur à 8,2 ; on fait donc tourner l'algorithme tant que la variable W est inférieure ou égale à 8,2.
Pour $n = 0$ donc $N = 0$, on a $1{,}2^n = 1$ donc la variable W doit être initialisée à 1.
Enfin on affiche en sortie la valeur de N qui est la première valeur de n telle que $1{,}2^n > 8{,}2$.

c. On résout l'inéquation $1{,}2^n > 8{,}2$:
$$\begin{aligned} 1{,}2^n > 8{,}2 &\iff \ln(1{,}2^n) > \ln(8{,}2) && \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;+\infty[\\ &\iff n \times \ln(1{,}2) > \ln(8{,}2) && \text{propriété de la fonction ln} \\ &\iff n > \frac{\ln(8{,}2)}{\ln(1{,}2)} \end{aligned}$$
Or $\dfrac{\ln(8{,}2)}{\ln(1{,}2)} \approx 11{,}5$ donc le premier entier naturel n tel que $u_n > 180\,000$ est $n = 12$.
Vérification : $u_{11} \approx 160\,752$ *et* $u_{12} \approx 197\,903$

d. À partir de 2023, l'entreprise prévoit une baisse de 15 % par an du nombre de ses ventes d'écrans 3D.
Le modèle est supposé donner une bonne approximation du nombre de modèles vendus jusqu'en 2022, c'est-à-dire pour $n = 22$: $u_{22} \approx 197\,903$.
Ensuite ce nombre diminue de 15 % par an, donc on lui applique un coefficient multiplicatif de 0,85 :
en 2023, le nombre estimé d'écrans vendus est de $197\,903 \times 0{,}85 \approx 168\,218$;
en 2024, il sera de $168\,218 \times 0{,}85 \approx 142\,984$;
et en 2025, il sera de $142\,984 \times 0{,}85 \approx 121\,536$.
L'entreprise peut prévoir de vendre 121 536 écrans 3D en 2025.

EXERCICE 3 Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques 5 points

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - x + 1$.

Affirmation A : La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0~;~1[$.

$f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) < 0$ sur $]0~;~1[$; donc la fonction f est décroissante sur $]0~;~1[$.

Affirmation A fausse

Affirmation B : La fonction f est convexe sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

$f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ sur $]0~;+\infty[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Affirmation B vraie

Affirmation C : Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x) \leqslant 50$.

$f(x)$ peut s'écrire $f(x) = x(\ln(x) - 1) + 1$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln(x) - 1) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (par produit).

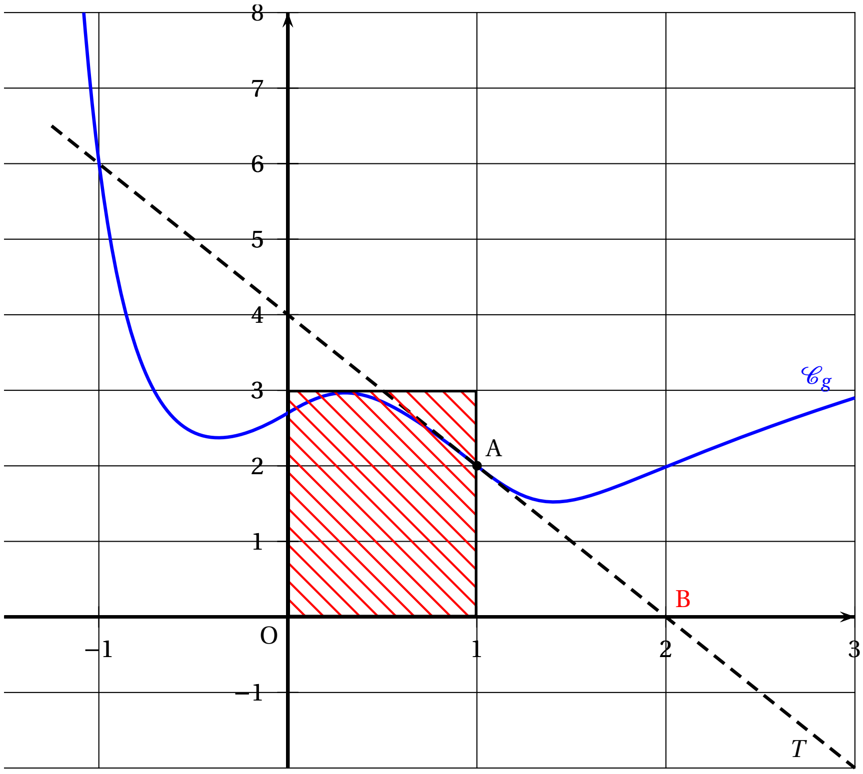
Donc on doit pouvoir trouver une valeur de x pour laquelle $f(x) > 50$; par exemple : $f(50) \approx 146{,}6 > 50$.

Affirmation C fausse

2. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.

On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on rappelle que g' désigne la dérivée de la fonction g.

On a tracé en pointillé la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point A de cette courbe, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.



Affirmation D : $g'(1) = -2$.

Soit B le point de la tangente T d'abscisse 2 ; d'après le texte, le point B a pour coordonnées $(2~;~0)$.

$g'(1)$ est le coefficient directeur de la droite T donc $g'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-2}{2-1} = -2$.

Affirmation D vraie

Affirmation E : $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < 3$.

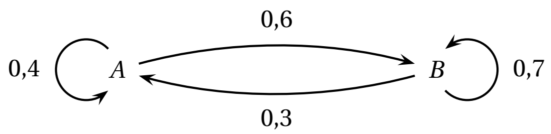
La fonction g est positive sur $[0\ ;1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Ce domaine est contenu dans le rectangle d'aire 3 hachuré sur la figure ; donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < 3$.

Affirmation E vraie

EXERCICE 3 Candidats ayant choisi la spécialité mathématiques 5 points

1. On donne le graphe probabiliste suivant :



Affirmation A : L'état stable associé à ce graphe est $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

En prenant les sommets dans l'ordre A - B, la matrice de transition associée à ce graphe est

$$M = \begin{pmatrix}0,4 & 0,6\\0,3 & 0,7\end{pmatrix}.$$

On calcule $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,4 & 0,6\\0,3 & 0,7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\times 0,4 + \frac{1}{3}\times 0,3 & \frac{2}{3}\times 0,6 + \frac{1}{3}\times 0,7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1,1}{3} & \frac{1,9}{3}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Affirmation A fausse

Remarque

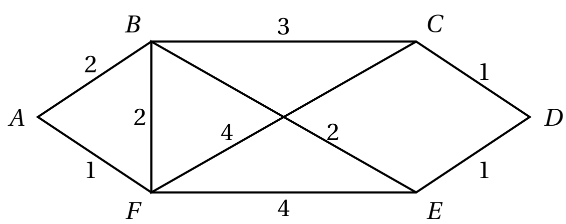
En l'absence d'indication particulière, on peut penser que les élèves auront pris les sommets dans l'ordre alphabétique, comme ils font d'habitude.

Mais si on prend les sommets dans l'ordre B - A, la matrice de transition est $M' = \begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,6 & 0,4\end{pmatrix}$

et, dans ce cas, l'état $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ est l'état stable associé à ce graphe.

L'affirmation devient vraie !

2. On donne le graphe pondéré G suivant :



Affirmation B : Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe.

On cherche donc une chaîne eulérienne dans ce graphe ; cette chaîne existe si et seulement si le nombre de sommets de degrés impairs est 2 ou 0 (dans ce dernier cas, il s'agit d'un cycle eulérien).

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degrés	2	4	3	2	3	4

Il n'y a que 2 sommets de degrés impairs, C et E, donc il existe au moins une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe; cette chaîne part de C et arrive à E, ou le contraire.
Exemple d'une telle chaîne : $C-B-A-F-B-E-D-C-F-E$
Affirmation B vraie

Affirmation C : La plus courte chaîne entre les sommets A et D est une chaîne de poids 5.
On va utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer le chemin le plus court allant de A à D.

A	B	C	D	E	F	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	A
	2 A	∞	∞	∞	1A	F (A)
	2 A 3 F	5 F	∞	5 F		B (A)
		5 F 5 B	∞	5 F 4 B		E (B)
		5 F 5 B	5 E			C (F)
			5 E			D (E)

Le chemin le plus court de A vers D est de poids 5 : $A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} D$
Affirmation C vraie

3. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose que M est la matrice d'adjacence d'un graphe à quatre sommets A, B, C, D dans cet ordre.
Affirmation D : Il existe exactement 3 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D.
Pour trouver le nombre de chaînes de longueur 4 reliant deux sommets, on calcule M^4 :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Le nombre de chaînes de longueur 4 reliant le sommet B (numéro 2) au sommet D (numéro 4) est la valeur du nombre situé à la ligne 2 et à la colonne 4, c'est-à-dire 6.
Affirmation D fausse

4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

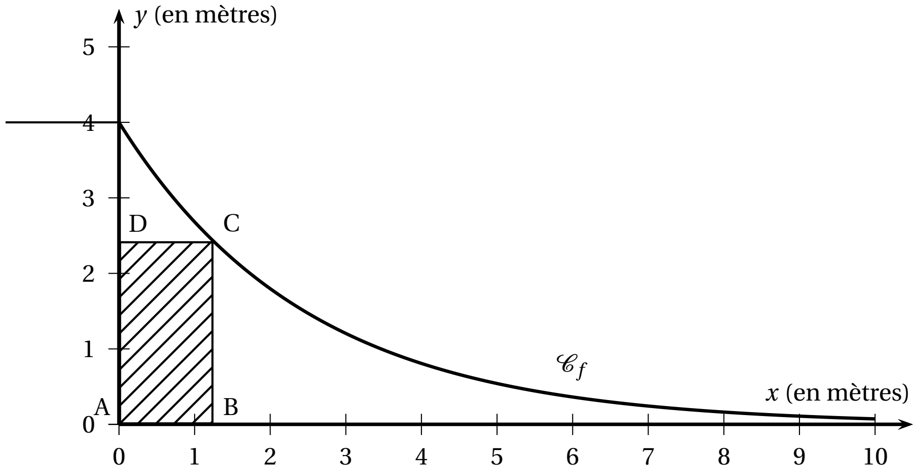
Affirmation E : Il existe un nombre réel a pour lequel B est l'inverse de A.

Pour que la matrice B soit l'inverse de la matrice A, il faut que $AB = BA = I_2$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$; $AB = I_2 \iff a = -1$
Dans ce cas $A = B$ donc $BA = AB = I_2$ et donc B est l'inverse de A.
Affirmation E vraie

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 3 points

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par : $f(x) = 4\mathrm{e}^{-0,4x}$.
Cette courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



Le rectangle ABCD représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. On suppose dans cette question que le point B a pour abscisse $x = 2$.
   Si $x_\text{B} = 2$, alors $x_\text{C} = 2$ et $y_\text{C} = f(2) \approx 1,797$.
   L'aire du rectangle ABCD est donc $\text{AB} \times \text{BC} = x_\text{C} \times y_\text{C} \approx 2 \times 1,797 \approx 3,6$.
   Une valeur approchée de l'aire du panneau publicitaire est 3,6 m².
2. Parmi tous les panneaux publicitaires qui répondent aux contraintes de l'énoncé, on va chercher celui qui a la plus grande aire possible.
   Soit x l'abscisse commune à B et à C ; on sait que $x \in [0\,;\,10]$.
   L'ordonnée de C est $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-0,4x}$.
   L'aire du panneau est donc $x \times f(x) = 4x\,\mathrm{e}^{-0,4x}$.
   Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,10]$ par $g(x) = 4x\,\mathrm{e}^{-0,4x}$. On va chercher si cette fonction admet un maximum sur son intervalle de définition.
   La fonction g est dérivable et $g'(x) = 4\,\mathrm{e}^{-0,4x} + 4x(-0,4)\,\mathrm{e}^{-0,4x} = 4\,\mathrm{e}^{-0,4x} - 1,6x\,\mathrm{e}^{-0,4x} = (4-1,6x)\,\mathrm{e}^{-0,4x}$.
   Pour tout x, $\mathrm{e}^{-0,4x} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $4 - 1,6x$.
   $4 - 1,6x > 0 \iff 4 > 1,6x \iff \dfrac{4}{1,6} > x \iff x < 2,5$
   La fonction g est donc strictement croissante sur $[0\,;\,2,5]$ et strictement décroissante sur $[2,5\,;\,10]$; elle admet donc un maximum pour $x = 2,5$.
   Une des dimensions du panneau publicitaire ayant la plus grande aire est donc 2,5 m et l'autre dimension est $f(2,5) \approx 1,47$ m.