

Exercice 1 - commun à tous les candidats

4 points

les justifications n'étaient pas demandées, elles sont données ici à titre indicatif

1. Réponse b

L'intervalle de confiance $I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ avec $f = \frac{225}{300} = 0,75$ et $n = 300$

2. Réponse d

Si X suit la loi uniforme sur $[4 ; 10]$ alors $P(X \leq 10) = P(4 \leq X \leq 10) = \frac{10-4}{11-4} = \frac{6}{7}$

3. Réponse d

$$f = ue^v \implies f' = u'e^v + uv'e^v = (u' + uv')e^v \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x + 1 \\ v(x) = -2x + 3 \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -2 \end{cases}$$

donc $f'(x) = (1 - 2(x + 1))e^{-2x+3} = (-2x - 1)e^{-2x+3}$

4. Réponse c

La courbe donnée de f'' nous indique que $f'(x) \leq 0$ sur $[-2 ; 1]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[1 ; 2]$ donc f est concave sur $[-2 ; 1]$ et convexe sur $[1 ; 2]$, elle admet donc un point d'inflexion en $x = 1$

Exercice 2 - Pour les non spécialistes ES et les spécialistes L

5 points

1. Le nombre de véhicules diminue de 25% chaque année donc il est multiplié par $1 - \frac{25}{100} = 0,75$ puis on ajoute les 3 000 nouveaux véhicules

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,75u_n + 3000$

2. a. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 12000 = 0,75u_n + 3000 - 12000 = 0,75u_n - 9000 = 0,75(u_n - 12000) = 0,75v_n$
donc (v_n) est géométrique de 1^{er} terme $v_0 = u_0 - 12000 = -2000$ et de raison $q = 0,75$

b. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n = -2000 \times 0,75^n$

c. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 12000 = 12000 - 2000 \times 0,75^n$

d. $-1 < 0,75 < 1$ on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$
donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12000$

Au bout d'un grand nombre d'année, le parc automobile comportera 12 000 véhicules

3. a. l'algorithme est donné ci-dessous

INITIALISATION	U prend la valeur 10 000 N prend la valeur 0
TRAITEMENT	Tant que $U < 11\,950$ N prend la valeur $N + 1$ U prend la valeur $0,75U + 3\,000$
SORTIE	Fin Tant que Afficher N

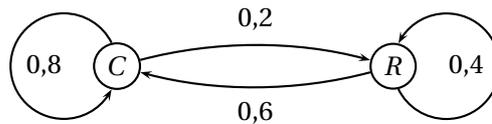
b. D'après la calculatrice, $u_{12} \approx 11937 < 11950$ et $u_{13} \approx 11952 > 11950$
Donc à partir de 2028, le parc comptera au moins 11 950 véhicules

c. $12000 - 2000 \times 0,75^n \geq 11950 \iff 0,75^n \leq 0,025 \iff n \ln(0,75) \leq \ln(0,025) \iff n \geq \frac{\ln(0,025)}{\ln(0,75)}$
or $\frac{\ln(0,025)}{\ln(0,75)} \approx 12,8$ donc $n \geq 13$
on retrouve bien le résultat précédent

Exercice 2 - Pour les spécialistes ES

5 points

1. le graphe probabiliste associé est :



2. La matrice transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

3. On a $(c_6 \ r_6) = (c_0 \ r_0) \times M^6 = (1 \ 0) \times M^6$

donc $c_6 = 0,750016 \approx 0,75$

4. a. $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = P_n \times M$

b. D'après ce qui précède on a

$$(c_{n+1} \ r_{n+1}) = (c_n \ r_n) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

donc $c_{n+1} = 0,8c_n + 0,6r_n$ or $(c_n \ r_n)$ est un état probabiliste donc $r_n = 1 - c_n$ on en déduit alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$$

5. a. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = c_{n+1} - 0,75 = 0,2c_n + 0,6 - 0,75 = 0,2c_n - 0,15 = 0,2(c_n - 0,75) = 0,2v_n$

donc (v_n) est géométrique de raison $q = 0,2$ et de 1^{er} terme $v_0 = c_0 - 0,75 = 0,25$

b. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = 0,25 \times 0,2^n$

$$-1 < 0,2 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

c. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = c_n - 0,75 \iff c_n = 0,75 + v_n$

on a bien $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$

d. le 29 décembre 2014 est le 363^{ème} jour de l'année or $2^{363} \approx 0$ donc on peut estimer que $c_{363} = 0,75$

Donc la probabilité qu'Hugo court le 29 décembre 2014 est d'environ 0,75

e. L'état stable semble être $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Validation : $PM = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = P$

donc $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ est bien l'état stable de ce graphe

Exercice 3 - commun à tous les candidats

5 points

Partie A

1. $P(R) = \frac{960}{3200} = 0,3$ car on se trouve dans une situation d'équiprobabilité et qu'il y a 960 chansons rock parmi les 3200 du répertoire.

2. On a donc $P_R(F) = 0,35$

3. $P(R \cap F) = P_R(F) \times P(R) = 0,35 \times 0,3 = 0,105$

4. On a $P(F) = 0,385$ or R et \bar{R} forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a $P(F) = P(R \cap F) + P(\bar{R} \cap F)$

On a donc $P(\bar{R} \cap F) = P(F) - P(R \cap F) = 0,385 - 0,105 = 0,28$

5. $P_{\bar{R}}(F) = \frac{P(\bar{R} \cap F)}{P(\bar{R})} = \frac{0,28}{0,7} = 0,4$

On en déduit que 40% des chansons autres que la catégorie rock sont chantées en français

Partie B

- $P(15 \leq X \leq 45) \approx 0,866$
- $P(X \geq 60) \approx 0,001$

Exercice 4 - commun à tous les candidats

6 points

Partie A

- $f'(1,5) = 0$ car en B d'abscisse 1,5 la tangente à (C) est horizontale
- Le coefficient directeur de la tangente est 1 donc elle est d'équation $y = x + b$ or A(1 ; 3) est sur cette tangente donc on a $b = 2$
Finalement la tangente à (C) en A a pour équation $y = x + 3$
- La fonction est positive sur [1 ; 2] donc l'aire cherchée est donnée par $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x) dx$
on a $3 \leq \mathcal{A} \leq 4$
- Sur [0,5 ; 6] la dérivée de f semble décroissante, on en déduit que f est concave sur [0,5 ; 6]

Partie B

- f est une somme de fonctions dérivables sur [0,5 ; 6] donc elle est dérivable sur cet intervalle

$\forall x \in [0,5 ; 6], f'(x) = -2 + \frac{3}{x} = \frac{-2x+3}{x}$

- Sur [0,5 ; 6], $x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x + 3$
on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0,5	1,5	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

On a $f(0,5) \approx 1,92$, $f(1,5) \approx 3,22$ et $f(6) \approx -1,63$

- Sur [0,5 ; 1,5], $f(x)$ admet $f(0,5) \approx 1,92 > 0$ pour minimum donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
Sur [1,5 ; 6], f est continue et strictement décroissante à valeurs dans $[f(6) ; f(1,5)]$ or $0 \in [f(6) ; f(1,5)]$
donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,
l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur [1,5 ; 6] donc sur [0,5 ; 6]

Par balayage on obtient $\alpha \approx 4,88$

- On en déduit le signe de $f(x)$

x	0,5	α	6
$f(x)$	+	0	-

5. a. F est dérivable sur $[0,5 ; 6]$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $[0,5 ; 6]$

$$F = u + 3v \ln(v) \implies F' = u' + 3 \ln(v) + 3v \frac{v'}{v} = u' + 3(v' + \ln(v)) \text{ avec } \begin{cases} u(x) = -x^2 + 2x \\ v(x) = x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = -2x + 2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

donc $\forall x \in [0,5 ; 6]$, $F'(x) = -2x + 2 + 3(1 + \ln(x)) = -2x + 5 + 3 \ln(x) = f(x)$

F est donc bien une primitive de f sur $[0,5 ; 6]$

b. $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x) dx = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = 6 \ln(2) - 1 \approx 3,2 \text{ u.a.}$