∽ Baccalauréat ES–L Antilles–Guyane ∾
juin 2016

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement 2 solutions, la première sur $[-1\ ;\ 1]$ et la deuxième sur $[1\ ;\ 2]$. Réponse b.
2. $\ln(2x) = 2$ ssi $2x = \mathrm{e}^2$ ssi $x = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$. Réponse b.
3. $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = 400 + 400 \times 0,5 + 400 \times 0,5^2 + \cdots + 400 \times 0,5^{10} =$
   $400\left(1 + 0,5 + 0,5^2 + \cdots + 0,5^{10}\right) = 400 \times \dfrac{1 - 0,5^{10+1}}{1 - 0,5} = 800 \times \left(1 - 0,5^{11}\right)$.
   Réponse c.
4. On fait fonctionner l'algorithme :

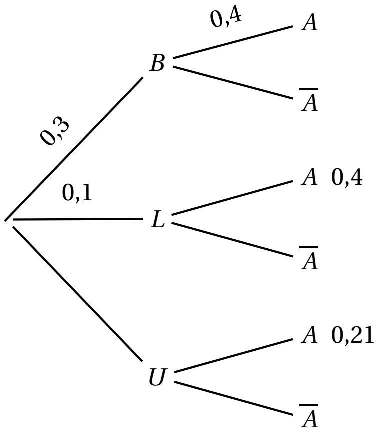
n	0	1	2	3	4	5
U	50	60	72	86,4	$\approx 103,7$	$\approx 124,4$
test	V	V	V	V	V	F

   Réponse c.
5. Une équation de la tangente à f en 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
   $f'(x) = 3 \times \dfrac{1}{x}$ donc $f'(1) = 3$ et $f(1) = 2 + 3\ln(1) = 2 + 3 \times 0 = 2$.
   Une équation est donc $y = 3(x-1) + 2 = 3x–3 + 2 = 3x - 1$ soit $y = 3x - 1$. Réponse b.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats de la série L ou de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. L'énoncé donne :
   $p(B) = 0,3,\ p(L) = 0,1\ ;\ p_B(A) = 0,4\ ;\ p(L \cap A) = 0,09$ et $p(U \cap A) = 0,21$.
   L'arbre de probabilités complété est :



2. On a $p(B \cap A) = p(B) \times p_B(A) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$.
3. D'après la loi des probabilités totales :
   $p(A) = p(B \cap A) + p(L \cap A) + p(U \cap A) = 0,12 + 0,09 + 0,21 = 0,42$.
4. $p_L(A) = \dfrac{p(L \cap A)}{p(L)} = \dfrac{0,09}{0,1} = 0,9$.

Partie B

1. T variable aléatoire suit la loi unifirme sur l'intervalle [1 ; 20], donc :
   $p(T \geqslant 12) = \dfrac{20-12}{20-1} = \dfrac{8}{19}$.
2. L'espérance mathématique de T est $E(T) = \dfrac{20+1}{2} = 10,5$.
   Un client attend en moyenne au guichet 10 min 30 secondes.

Partie C

1. On cherche $p(X > 250) = p(X \geqslant 220) - p(220 \leqslant X \leqslant 250) =$
   $0,5 - p(220 \leqslant X \leqslant 250) \approx 0,16$.
   À la calculatrice, on trouve qu'au centième près la probabilité que l'agence doive prévoir un rapatriement de véhicules est de 0,16.
   Remarque : On voit facilement que $p(X > 250) = p(X > \mu + \sigma)$.
   Or on sait que $p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,68$ et $p(X < \mu - \sigma) = p(X > \mu + \sigma)$.
   Et comme $p(X < \mu - \sigma) + p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) + p(X > \mu + \sigma) = 1$, on a :
   $p(X > \mu + \sigma) = \dfrac{1 - p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)}{2}$ soit environ $\dfrac{1-0,68}{2} = 0,16$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. **a.**

Sommet	B	C	D	E	F	G	H
Degré du sommet	2	4	3	2	4	4	3

   Le graphe a exactement 2 sommets de degré impair, il admet donc une chaîne eulérienne, mais pas de cycle eulérien. Le guide ne peut donc pas partir et revenir à l'hôtel en passant une fois et une seule par chaque chemin.

   b. Le graphe admettant une chaîne eulérienne et H étant de degré impair le guide peut emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux en partant de l'hôtel. Il arriverait alors au somment D (l'autre sommet de degré impair).le parcours est : H–B–G–E–F–C–D.

2. On utilise l'algorithme de Dijkstra-Moore en partant du sommet H :

B	C	D	E	F	G	H	Sommet sélectionné
∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	H (0)
12 (H)	20 (H)	**9 (H)**	∞	∞	∞		D (9)
12 (H)	17 (D)		∞	30 (D)	∞		B (12)
	17 (D)		∞	30 (D)	25 (B)		C (17)
			∞	28 (C)	**24 (C)**		G (24)
			33 (G)	**28 (C)**			F (28)
			31 (F)				E (31)

   Le chemin le plus court pour aller de H à E fait 32 km ; c'est H–D–C–F–E.

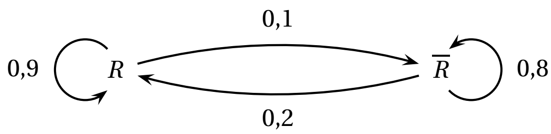
Partie B

1. Si R_n est l'évènement « l'hôtel est répertorié en $2015+n$ » et $\overline{R_n}$ son évènement contraire, on a

— 10 % des hôtels répertoriés une année ne l'étant plus l'année suivante : $P_{R_n}\left(\overline{R_{n+1}}\right) = 0,1$ et donc $P_{R_n}\left(R_{n+1}\right) = 1 - 0,1 = 0,9$;

— 20 % des hôtels non répertoriés une année le seront l'année suivante, soit $P_{\overline{R_n}}\left(R_{n+1}\right) = 0,2$ et par conséquent $P_{\overline{R_n}}\left(\overline{R_{n+1}}\right) = 1 - 0,2 = 0,8$.

On a donc le graphe probabiliste suivant :



2. Pour ce graphe, la matrice de transition est $M = \begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\0,2 & 0,8\end{pmatrix}$, en respectant l'ordre R, $\overline{R}$.

3. Soit

— a_n la probabilité qu'un hôtel soit répertorié en $2015+n$;

— b_n la probabilité qu'il ne le soit pas en $2015+n$;

— $P_n = \begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ la matrice de l'état probabiliste l'année $2015+n$.

On sait qu'en 2015 30 % des hôtels sont répertoriés, donc $P_0 = \begin{pmatrix}0,3 & 0,7\end{pmatrix}$: donc en 2016 :

$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix}0,3 & 0,7\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\0,2 & 0,8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,41 & 0,59\end{pmatrix}$.

En 2016, 41 % des hôtels seront répertoriés. En 2017 :

$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix}0,41 & 0,59\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\0,2 & 0,8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,487 & 0,513\end{pmatrix}$.

En 2017, 48,7 % des hôtels seront répertoriés.

4. Les termes de la matrice de transition n'étant pas nuls, l'état P_n converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix}a & a\end{pmatrix}$ avec $a+b=1$ qui vérifie $P = P \times M$ soit . Il semblerait donc que l'état stable soit :

$\left\{\begin{array}{lcr} a & = & 0,9a+0,2b\\ a+b & = & 1\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{lcr} 0,1a-0,2b & = & 0\\ a+b & = & 1\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{lcr} a-2b & = & 0\\ a+b & = & 1\end{array}\right.$

ou $\left\{\begin{array}{lcr} a-2b & = & 0\\ 2b+b & = & 1\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcr} a & = & \dfrac{2}{3}\\ b & = & \dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

$P = \begin{pmatrix}\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$.

P est bien l'état stable, donc à terme deux tiers des hôtels seront répertoriés.

EXERCICE 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

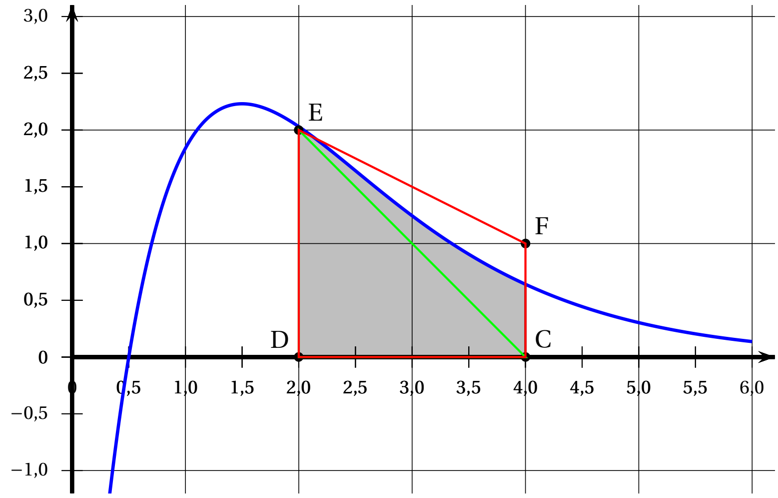
1. $f(x) > 0$ sur [0,5 ; 6]

2. Le maximum de f sur [0 ; 6] est environ 2,2.

3. f est décroissante sur [2 ; 6] donc $f'(x)$ est négative sur [2 ; 6]

4. f semble concave sur [0 ; 2] puis convexe sur [3 ; 6]. La courbe admet donc un point d'inflexion sur [2 ; 3].

5.



Comme un carreau est égal à une unité d'aire, l'aire de la surface grisée est égale à $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Elle est supérieure à celle du triangle CDE d'aire $\dfrac{2\times 2}{2} = 2$ et inférieure à celle du trapèze rectangle DCFE d'aire : $\dfrac{1+2}{2}\times 2 = 3$.

Donc : $2 < \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x < 3$.

Partie B

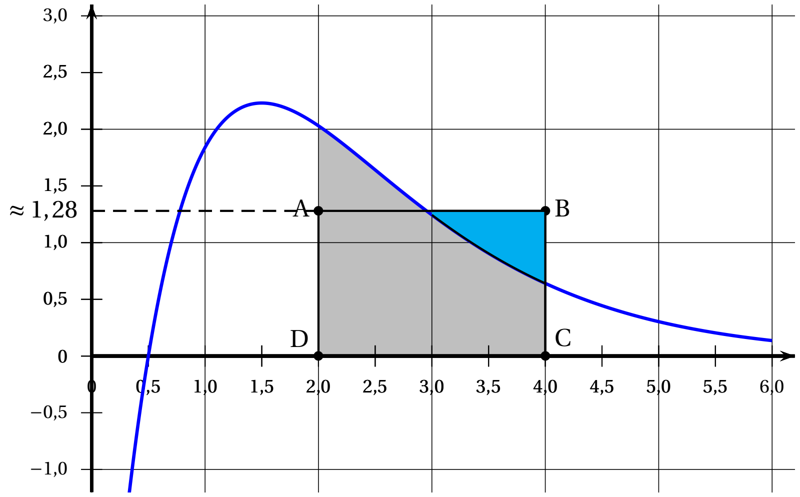
1. $f'(x) = (-10x+15)\mathrm{e}^{-x}$.
Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, $f'(x)$ est du signe de $-10x+5$.
Or $-10x+15 > 0 \iff 15 > 10x \iff 1,5 > x \iff x < 1,5$.
De même $-10x+15 < 0 \iff x > 1,5$.
Donc f est croissante sur $[0\,;\,1,5]$ et décroissante sur $[1,5\,;\,6]$.
Valeurs de la fonction aux bornes : $f(x) = (10x-5)\mathrm{e}^{-x}$
- $f(0) = -5\mathrm{e}^{-0} = -5$;
- $f(1,5) = (15-5)\mathrm{e}^{-1,5} = 10\mathrm{e}^{-1,5} \approx 2,23$;
- $f(6) = (60-5)\mathrm{e}^{-6} = 55\mathrm{e}^{-6} \approx 0,14$. D'où le tableau de variations :

x	0		$1,5$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-5	$\nearrow$	$10\mathrm{e}^{-1,5}$	$\searrow$	$55\mathrm{e}^{-6}$

2. $f''(x) = (10x-25)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Comme précédemment $f''(x)$ a le signe de $10x-25$. Or :
$10x-25 > 0 \iff 2x-5 > 0 \iff 2x > 5 \iff x > \dfrac{5}{2}$; de même
$10x-25 < 0 \iff x < \dfrac{5}{2}$.
f est donc concave sur $[0\,;\,2,5]$ puis convexe sur $[2,5\,;\,6]$.

3. $F(x) = (-10x-5)\mathrm{e}^{-x}$. F est de la forme $u\times v$ donc F' est de la forme $u'\times v + v'\times u$:
$F'(x) = -10\times\mathrm{e}^{-x} + (-\mathrm{e}^{-x})\times(-10x-5) = [-10-(-10x-5)]\mathrm{e}^{-x} = [-10+10x+5]\mathrm{e}^{-x} = (10x-5)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
Donc F est bien une primitive de f sur $[0\,;\,6]$.

4. D'après le résultat précédent : $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_2^4 = F(4) - F(2) =$ $(-10\times 4-5)\mathrm{e}^{-4} - (-10\times 2-5)\mathrm{e}^{-2} = -45\mathrm{e}^{-4} + 25\mathrm{e}^{-2} \approx 2,559 \approx 2,56$ au centième près.
5. L'aire du rectangle est égale à $2\times \mathrm{AD}$. On a donc :
   $2\times \mathrm{AD} = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, soit $\mathrm{AD} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ ou encore :
   $\mathrm{AD} = \dfrac{1}{4-2}\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$: on reconnaît la valeur moyenne moyenne de f sur l'intervalle $[2\,;4]$.
   Donc $\mathrm{AD} = \dfrac{1}{2}\left(25\mathrm{e}^{-2} - 45\mathrm{e}^{-4}\right) \approx 1,279$ soit 1,28 au centième.



EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. Si l'évolution est une diminution de 10 %, le coefficient multiplicateur correspondant est 0,9.
   Or, entre 2013 et 2015 il y a 2 ans et $410\times 0,9^2 = 332,1 \approx 332$.
   On peut donc considérer que le taux de diminution annuel de polluants rejetés est 10 %.
2. Si on note u_n la quantité de polluants rejetés par les entreprises lors de l'année $2013+n$, exprimée en tonnes, alors (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 410$ et de raison 0,9.
   On a donc $u_n = 410\times 0,9^n$.
   On cherche alors la valeur de n pour que $u_n < 180$ soit
   $410\times 0,9^n < 180 \iff 0,9^n < \dfrac{180}{410}$ car $410 > 0$ ou
   $\ln\left(0,9^n\right) < \ln\left(\dfrac{18}{41}\right)$ car la fonction ln est croissante, d'où
   $n\ln 0,9 < \ln\left(\dfrac{18}{41}\right)$ et enfin :
   $n > \dfrac{\ln\left(\frac{18}{41}\right)}{\ln 0,9}$ car $\ln 0,9 < 0$.
   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{18}{41}\right)}{\ln 0,9} \approx 7,8$.
   Il faut donc prendre $n = 8$.
   C'est en 2021 que la quantité de polluants rejetés sera sous les 180 tonnes pour la première fois.