Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie
16 novembre 2016

EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats** **4 points**

1. On considère f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (2x+3)\,\mathrm{e}^{-x}$.

a. $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x}$	**b.** $f'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x}$
c. $f'(x) = (2x+5)\,\mathrm{e}^{-x}$	**d.** $f'(x) = (-2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$

Réponse d.
$f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + (2x+3) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (2-2x-3)\,\mathrm{e}^{-x} = (-2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$

2. On considère le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 \left(2\mathrm{e}^{2x}+3\right)\,\mathrm{d}x$.

a. $I = \mathrm{e}^2+3$	**b.** $I = \mathrm{e}^2+2$
c. $I = 2\mathrm{e}^2+3$	**d.** $I = 2\mathrm{e}^2-2$

Réponse b.
Une primitive de $x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{2x}+3$ est $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}+3x$, donc $I = \left[\mathrm{e}^{2x}+3x\right]_0^1 = \left(\mathrm{e}^2+3\right) - \left(\mathrm{e}^0+0\right) = \mathrm{e}^2+2$.

3. On considère g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 5\,\mathrm{e}^{x}+3$.
La tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 passe par le point :

a. A$(1\,;\,5\,\mathrm{e}+3)$	**b.** B$(-1\,;\,5)$
c. C$(1\,;\,13)$	**d.** D$(0\,;\,3)$

Réponse c.
La tangente en 0 a pour équation $y = g'(0)\,(x-0) + g(0)$.
$g(0) = 8$; $g'(x) = 5\,\mathrm{e}^{x}$ donc $g'(0) = 5$. D'où l'équation de la tangente : $y = 5x+8$.

4. On considère h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = x^3-6x+3$.

a. h est strictement croissante sur $\mathbf{R}$	**b.** h est concave sur $[0\,;\,+\infty[$
c. h est concave sur $\mathbf{R}$	**d.** h est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$

Réponse d.
$h(x) = x^3-6x+3$ donc $h'(x) = 3x^2-6$ et $h''(x) = 6x > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
Donc la fonction h est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 350$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,5u_n + 100$.

1. $u_1 = 0,5 \times 350 + 100 = 275$ et $u_2 = 0,5 \times 275 + 100 = 237,5$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = u_n - 200$.
   Donc, pour tout n, $u_n = w_n + 200$.
   a. $w_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,5u_n + 100 - 200 = 0,5(w_n + 200) - 100 = 0,5w_n + 100 - 100 = 0,5w_n$
   $w_0 = u_0 - 200 = 350 - 200 = 150$
   Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $w_0 = 150$.
   On en déduit que, pour tout n, $w_n = w_0 \times q^n = 150 \times 0,5^n$.
   b. On a à la fois $w_n = 150 \times 0,5^n$ et $u_n = w_n + 200$ donc on peut en conclure que, pour tout entier naturel n, $u_n = 200 + 150 \times 0,5^n$.

Partie B

Une commune propose aux enfants d'adhérer à une association sportive. Au premier septembre 2015 le nombre d'enfants inscrits dans cette association est 500 dont 350 filles.
Les statistiques relatives aux années précédentes nous amènent, pour l'évolution du nombre d'adhérents lors des prochaines années à la modélisation suivante :

— Chaque année, la moitié des filles inscrites l'année précédente ne renouvellent pas leur inscription ; par ailleurs l'association accueille chaque année 100 nouvelles filles.
— D'une année à l'autre, le nombre de garçons inscrits à l'association augmente de 10 %.

1. On représente l'évolution du nombre de filles inscrites dans ce club par une suite (F_n) où F_n désigne le nombre de filles adhérentes à l'association en l'année $2015 + n$. On a donc $F_0 = 350$.
   La moitié des filles ne renouvellent pas leur inscription d'une année sur l'autre donc il faut multiplier le nombre de filles l'année n par 0,5 pour avoir le nombre de filles qui renouvellent leur inscription. De plus chaque année l'association accueille 100 nouvelles filles donc il faudra rajouter 100 pour obtenir le nombre de filles l'année $n + 1$.
   Autrement dit, pour tout n, $F_{n+1} = 0,5F_n + 100$.
2. On représente l'évolution du nombre de garçons inscrits dans ce club par une suite (G_n), où G_n désigne le nombre de garçons adhérents à l'association l'année $2015 + n$.
   a. D'après le texte, $G_0 = 500 - 350 = 150$.
   Augmenter de 10 %, c'est multiplier par 1,1 donc, pour tout n, $G_{n+1} = 1,1G_n$.
   La suite (G_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,1$ et de premier terme $G_0 = 150$ donc, pour tout n, $G_n = G_0 \times q^n = 150 \times 1,1^n$.
   b. On cherche n tel que $G_n > 300$; on résout cette inéquation :
   $$\begin{aligned} G_n > 300 &\iff 150 \times 1,1^n > 300 \\ &\iff 1,1^n > 2 \\ &\iff \ln(1,1^n) > \ln(2) && \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;\,+\infty[\\ &\iff n\ln(1,1 > \ln(2) && \text{propriété de la fonction ln} \\ &\iff n > \frac{\ln(2)}{\ln(1,1)} \end{aligned}$$
   $\dfrac{\ln(2)}{\ln(1,1)} \approx 7,27$ donc c'est à partir de 8, c'est-à-dire de l'année $2015 + 8 = 2023$ que le nombre de garçons dépassera 300.

3. On souhaite savoir à partir de quelle année le nombre de garçons, dans cette association, va dépasser celui des filles. On propose l'algorithme suivant :

Initialisation
  Affecter à n la valeur 0
  Affecter à G la valeur 150
  Affecter à F la valeur 350
Traitement
  Tant que $G \leqslant F$
    n prend la valeur $n+1$
    G prend la valeur $1,1G$
    F prend la valeur $0,5F+100$
  Fin tant que
Sortie
  Afficher le nombre n

a. On complète le tableau suivant (résultats arrondis à l'unité) :

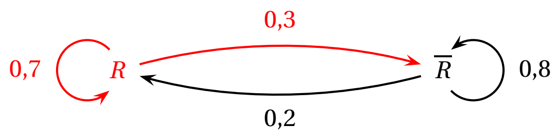
Valeur de n	0	1	2	3	4
Valeur de G	150	165	182	200	220
Valeur de F	350	275	238	219	209
Condition $G \leqslant F$	vrai	vrai	vrai	vrai	**faux**

b. L'affichage obtenu est donc 4 ce qui signifie qu'en 2019 le nombre de garçons aura dépassé le nombre de filles dans le club.

EXERCICE 2 — Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

Pierre prend des cours de natation ; il effectue plusieurs plongeons.
Lorsque Pierre réussit un plongeon, il prend confiance en lui et la probabilité qu'il réussisse le plongeon suivant est de 0,7.
Par contre,lorsqu'il ne réussit pas un plongeon, la probabilité qu'il réussisse le plongeon est égale à 0,2.
On suppose que Pierre a réussi son premier plongeon.
L'état « plongeon réussi » est noté R ; l'état « plongeon non réussi » est noté $\overline{R}$.
Pour tout entier naturel $n > 1$, la probabilité que Pierre réussisse son n-ième plongeon est notée a_n, tandis que la probabilité que Pierre ne réussisse pas son n-ième plongeon est notée b_n.
La matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ donne l'état probabiliste du système lors du n-ième plongeon.

1. On représente la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets R et $\overline{R}$:



2. D'après le texte, on a : $\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 0,7a_n + 0,2b_n \\ b_{n+1} & = & 0,3a_n + 0,6b_n \end{array}\right.$

ce qui s'écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

Donc la matrice de transition de ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

3. On suppose que Pierre a réussi son premier plongeon donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, donc $P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.

4. La probabilité que Pierre réussisse son quatrième plongeon est P_4 :
$P_2 = P_1 \times M$; $P_3 = P_2 \times M = P_1 \times M^2$ et $P_4 = P_3 \times M = P_1 \times M^3$
On trouve à la calculatrice $P_4 = \begin{pmatrix}0,475 & 0,525\end{pmatrix}$.

5. D'après le texte, pour tout n, $a_n + b_n = 1$.
On a vu que $a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n$ donc $a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2(1 - a_n)$ ou encore $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2$.
On a donc démontré que, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2$.

6. Lorsque la probabilité que Pierre réussisse son plongeon devient inférieure ou égale à $0,41$, le maître-nageur demande à Pierre de faire une pause.
On veut alors déterminer au bout de combien d'essais Pierre arrête sa série de plongeons.
On cherche donc le plus petit entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $a_n \leqslant 0,41$.
On complète l'algorithme proposé dans le texte :

```
Initialisation
    Affecter à N la valeur 1
    A prend la valeur 1
Traitement
    Tant que A > 0,41
        N prend la valeur N + 1
        A prend la valeur 0,5A + 0,2
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher N
```

7. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,4$; donc $a_n = u_n + 0,4$.

a. $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,4 = 0,5a_n + 0,2 - 0,4 = 0,5(u_n + 0,4) - 0,2 = 0,5u_n + 0,2 - 0,2 = 0,5u_n$
$u_1 = a_1 - 0,4 = 1 - 0,4 = 0,6$
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = 0,6$.
On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,6 \times 0,5^{n-1}$.

b. On sait que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 0,6 \times 0,5^{n-1}$, et que $a_n = u_n + 0,4$, donc on en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = 0,6 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.

c. On résout l'inéquation $a_n \leqslant 0,41$:

$$\begin{aligned}
a_n \leqslant 0,41 &\iff 0,6 \times 0,5^{n-1} + 0,4 \leqslant 0,41\\
&\iff 0,6 \times 0,5^{n-1} \leqslant 0,01\\
&\iff 0,5^{n-1} \leqslant \frac{0,01}{0,6}\\
&\iff \ln\left(0,5^{n-1}\right) \leqslant \ln\left(\frac{0,01}{0,6}\right) && \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;\,+\infty[\\
&\iff (n-1)\ln(0,5) \leqslant \ln\left(\frac{0,01}{0,6}\right) && \text{propriété de la fonction ln}\\
&\iff n - 1 \geqslant \frac{\ln\left(\frac{0,01}{0,6}\right)}{\ln(0,5)} && \text{car } \ln(0,5) < 0
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{0,01}{0,6}\right)}{\ln(0,5)} \approx 5,9$ on doit donc avoir $n - 1 \geqslant 5,9$, c'est-à-dire $n \geqslant 6,9$.
Le plus petit entier naturel n tel que $a_n \leqslant 0,41$ est $n = 7$.

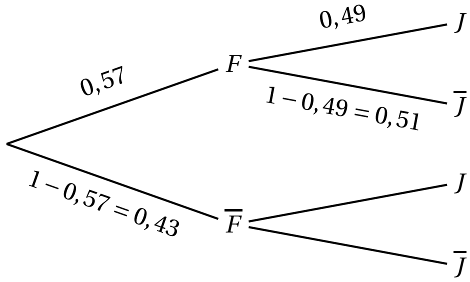
d. $n = 7$ est la première valeur pour laquelle la probabilité de réussir le plongeon est inférieure à $0,41$, Pierre arrêtera ses plongeons après le 7e.

EXERCICE 3 — Commun à tous les candidats — 5 points

Partie A

Une enquête révèle que dans un lycée, 67 % des élèves jouent régulièrement aux jeux vidéo.
On sait de plus que 57 % des élèves du lycée sont des filles et que, parmi elles, 49 % jouent régulièrement aux jeux vidéo.
On choisit au hasard un élève du lycée.
On note : J l'évènement : « l'élève joue régulièrement aux jeux vidéo », et F l'évènement : « l'élève est une fille ».

1. On complète l'arbre proposé grâce aux données du texte :



2. L'événement « l'élève est une fille qui joue régulièrement aux jeux vidéo » est $F \cap J$:
$p(F \cap J) = p(F) \times p_F(J) = 0,57 \times 0,49 = 0,2793$
3. L'événement « l'élève est un garçon qui joue régulièrement aux jeux vidéo » est $\overline{F} \cap J$.
D'après la formule des probabilités totales : $p(J) = p(F \cap J) + p(\overline{F} \cap J)$.
On sait que 67 % des élèves jouent aux jeux vidéo, donc $p(J) = 0,67$.
On a démontré dans la question précédente que $p(F \cap J) = 0,2793$.
On déduit donc que $p(J) - p(F \cap J) = p(\overline{F} \cap J) \iff 0,67 - 0,2793 = p(\overline{F} \cap J)$ autrement dit $p(\overline{F} \cap J) = 0,3907$.
La probabilité que l'élève soit une garçon qui joue régulièrement aux jeux vidéo est 0,3907.
4. La probabilité que l'élève joue régulièrement aux jeux vidéo sachant que c'est un garçon est $p_{\overline{F}}(J)$:
$$p_{\overline{F}}(J) = \frac{p(\overline{F} \cap J)}{p(\overline{F}} = \frac{0,3907}{0,43} \approx 0,9086$$

Partie B

Zoé, grande amatrice de jeux vidéo, souhaite s'offrir une tablette numérique pour son anniversaire. Elle pense commander sur un site web marchand une tablette de marque Alpha. Elle s'inquiète quant à l'autonomie de sa tablette en mode veille. On admet que l'on peut modéliser la durée d'autonomie de chaque tablette de marque Alpha en mode veille par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 120$ et d'écart-type $\sigma = 10$. La durée X est exprimée en heures.

1. Une durée de 5 jours correspond à $5 \times 24 = 120$ heures. On cherche donc $p(X < 120)$.
D'après le cours, comme 120 correspond à la moyenne de la loi normale, $p(X < 120) = 0,5$.
La probabilité que la tablette numérique ait en mode veille une autonomie strictement inférieure à 5 jours est de 0,5.
2. À la calculatrice, on trouve $p(96 \leqslant X \leqslant 144) \approx 0,984$.
La durée X s'exprime en heures ; 96 heures correspondent à 4 jours et 144 heures correspondent à 6 jours.
La probabilité que la tablette numérique ait, en mode veille, une autonomie entre 4 et 6 jours est de 0,984.

Partie C

Le service des ventes de la société Alpha affirme que 91 % des utilisateurs de cette tablette sont satisfaits de leur achat. Le gestionnaire du site marchand organise une enquête afin de vérifier cette affirmation.
Il interroge au hasard 150 clients ayant acheté cette tablette ; parmi eux, 130 se déclarent satisfaits de leur acquisition ; la fréquence de clients satisfaits dans cet échantillon est donc $f = \dfrac{130}{150} \approx 0,867$.
On sait que $p = 0,91$ et $n = 150$. $n = 150 \geqslant 30$; $np = 136,5 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 13,5 \geqslant 5$
Les conditions sont vérifiées donc on peut déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

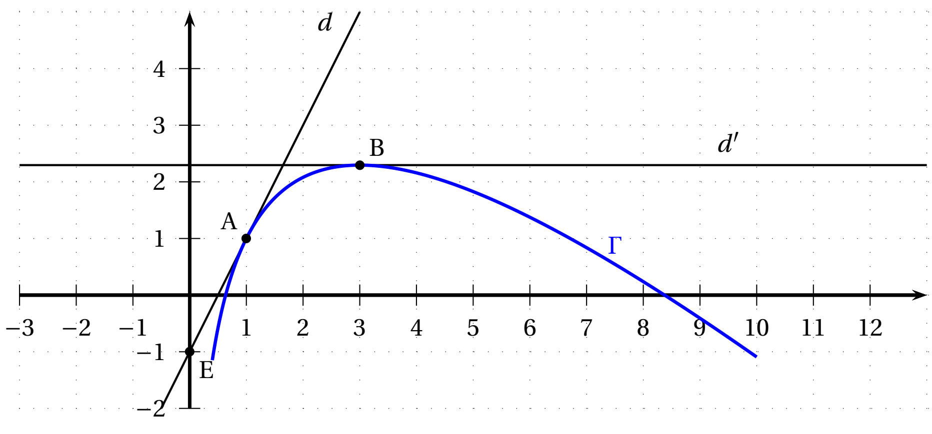
$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0,91 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,91(1-0,91)}}{\sqrt{150}}\ ;\ 0,91 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,91(1-0,91)}}{\sqrt{150}}\right] \approx [0,864\ ;\ 0,956] \end{aligned}$$

$0,867 \in [0,864\ ;\ 0,956]$ c'est-à-dire $f \in I$ donc on peut valider l'affirmation du service des ventes de la société.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 6 points

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 10]$ par : $f(x) = ax + 2 + b\ln(x$, où a et b sont deux nombres réels.
On note f' la fonction dérivée de f.
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative Γ de la fonction f ;
- la droite d tangente à la courbe Γ au point A de coordonnées $(1\ ;\ 1)$;
- la droite d' tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 3.



On sait de plus que :

- la tangente au point A passe par le point E de coordonnées $(0\ ;\ -1)$.
- la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie A

1. On peut lire sur le graphique que $f'(1) = 2$ et $f'(3) = 0$.
2. La fonction f est dérivable sur $[0,5\ ;\ 10\ ]$ et $f'(x) = a + \dfrac{b}{x}$.

3. $f'(1)=2 \iff a+b=2$; $f'(3)=0 \iff a=\dfrac{b}{3}=0$

On résout le système $\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 2 \\ a+\dfrac{b}{3} &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 2 \\ \dfrac{2b}{3} &=& 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -1 \\ b &=& 3 \end{array}\right.$

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,10]$ par : $f(x)=-x+2+3\ln(x)$.

1. La fonction f est dérivable sur $[0{,}5\,;\,10]$ et $f'(x)=-1+\dfrac{3}{x}=\dfrac{-x+3}{x}$.

2. La tangente à la courbe Γ au point A d'abscisse 1 a pour équation $y=f'(1)\,(x-1)+f(1)$.
C'est-à-dire $y=2(x-1)+1$ donc $y=2x-1$.

3. La fonction dérivée f' est du signe de $-x+3$ sur $[0{,}5\,;\,10]$ donc s'annule et change de signe pour $x=3$.
$f(0,5)=1,5+3\ln(0,5)\approx -0,58$; $f(3)=-1+3\ln(3)\approx 2,30$; $f(10)=-8+3\ln(10)\approx -1,09$
On établit le tableau de variations de la fonction f :

x	$0,5$		3		10
$-x+3$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$1,5+3\ln 0,5$	$\nearrow$	$3\ln 3-1$	$\searrow$	$3\ln 10-8$

4. On sait que $f(0,5)\approx -0,58<0$ et $f(3)\approx 2,30>0$.
On complète le tableau de variations de la fonction f :

x	$0,5$		α		3		10
$f(x)$	$1,5+3\ln 0,5$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$3\ln 3-1$	$\searrow$	$3\ln 10-8$

D'après le tableau de variations de f, on peut dire que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,5\,;\,3]$.
La calculatrice donne la valeur approchée de cette solution : $\alpha_a pprox 0,63$.

5. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

1	*intégrer* $[3\ln(x)-x+2]$
	$3x\ln(x)-x-\dfrac{x^2}{2}$

La fonction f est positive sur $[1\,;\,8]$ donc l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses, et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=8$ est $\mathscr{A}=\displaystyle\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.

D'après le logiciel de calcul formel, la fonction F définie par $F(x)=3x\ln x-x-\dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de la fonction f.

Donc $\mathscr{A}=F(8)-F(1)=\left(24\ln 8-8-\dfrac{64}{2}\right)-\left(3\ln 1-1-\dfrac{1}{2}\right)=24\ln 8-38,5\approx 11,41$ unités d'aire.

Partie C

Tom observe que sur le dessin précédent, la courbe représentative de f est située en dessous des deux tangentes aux points A et 8. Il affirme : « La courbe représentative de f sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes. »

$f'(x) = \dfrac{-x+3}{x} = -1 + \dfrac{3}{x}$ donc $f''(x) = -\dfrac{3}{x^2} < 0$ sur $[0,5\,;\,10]$.

La fonction f est donc concave sur $[0,5\,;\,10]$ ce qui veut dire que, sur cet intervalle, la courbe représentant f est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.