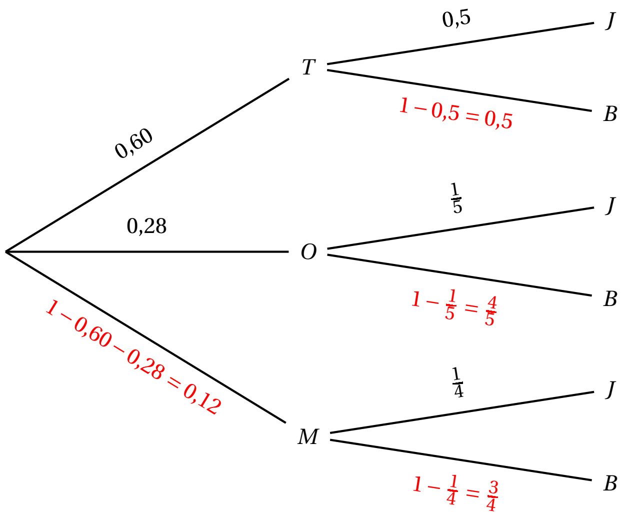
∽ Corrigé du baccalauréat ES (spécialité) Nouvelle-Calédonie ∾ mars 2017

EXERCICE 1 Commun à tous les candidats 6 points

À l'occasion de la fête des Mères, un fleuriste décide de proposer à ses clients plusieurs types de bouquets spéciaux.

Partie A

1. On construit un arbre pondéré représentant la situation :



2. La probabilité que le client ait acheté un bouquet de tulipes blanches est $P(T \cap B) = P(T) \times P_T(B) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$.
3. D'après la formule des probabilités totales :
$P(B) = P(T \cap B) + P(O \cap B) + P(M \cap B) = P(T) \times P_T(B) + P(O) \times P_O(B) + P(M) \times P_M(B)$
$$= 0{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}28 \times \dfrac{4}{5} + 0{,}12 \times \dfrac{3}{4} = 0{,}3 + 0{,}224 + 0{,}09 = 0{,}614.$$
4. Sachant que les fleurs du bouquet acheté par ce client sont blanches, la probabilité que ce soit un bouquet d'œillets est $P_B(O) = \dfrac{P(O \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}224}{0{,}614} \approx 0{,}365$.

Partie B

L'un des fournisseurs du fleuriste est un jardinier spécialisé dans la production d'une espèce de rosiers nommée « Arlequin ».
On note X la variable aléatoire qui, à chaque rosier de cette espèce pris au hasard, cultivé chez ce jardinier, associe sa hauteur exprimée en centimètres. On admet, d'après les observations et mesures réalisées, que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

1. On choisit au hasard un rosier « Arlequin » chez ce fournisseur.
   a. La probabilité que ce rosier mesure entre 47 et 53 centimètres est $P(47 \leqslant X \leqslant 53) \approx 0{,}683$ (résultat obtenu à la calculatrice).
   b. La probabilité que ce rosier mesure plus de 56 centimètres est $P(X > 56) \approx 0{,}023$ (calculatrice).
2. Le fournisseur veut prévoir quelle sera la hauteur atteinte ou dépassée par 80 % de ses rosiers « Arlequin » : on cherche donc la hauteur h telle que $P(X \geqslant h) = 0{,}8$.
   Pour des raisons de symétrie $P(X \geqslant h) = 0{,}8 \iff P(X \leqslant h) = 1 - 0{,}8 \iff P(X \leqslant h) = 0{,}2$.
   Pour $P(X \leqslant h) = 0{,}2$, on trouve à la calculatrice $h \approx 47{,}5$ cm.

Partie C

En se basant sur les ventes réalisées l'année précédente, cc fleuriste suppose que 85 % de ses clients viendront ce jour-là acheter un des bouquets pour la fête des Mères.
Quelques semaines avant de préparer ses commandes, il décide de vérifier son hypothèse en envoyant un questionnaire à 75 de ses clients, ces derniers étant supposés représentatifs de l'ensemble de sa clientèle.
On est donc en présence d'un échantillon de taille $n = 75$ dans lequel on suppose que la proportion p de clients qui viendront acheter un bouquet est de 0,85.
On détermine un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de clients qui devraient acheter un bouquet :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}85 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}85 \times 0{,}25}}{\sqrt{75}}\ ;\ 0{,}85 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}85 \times 0{,}15}}{\sqrt{75}}\right]$$

$\approx [0{,}76\ ;\ 0{,}94]$

Les réponses reçues montrent que, parmi les 75 clients interrogés, 16 déclarent qu'ils ne lui achèteront pas de bouquet pour la fête des Mères donc $75 - 16 = 59$ vont acheter un bouquet ; la fréquence observée est donc de $f = \dfrac{59}{75} \approx 0{,}79$.
$f \in I$ donc il n'y a pas de raison de rejeter l'hypothèse du fleuriste.

EXERCICE 2 Commun à tous les candidats 3 points

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Alors :

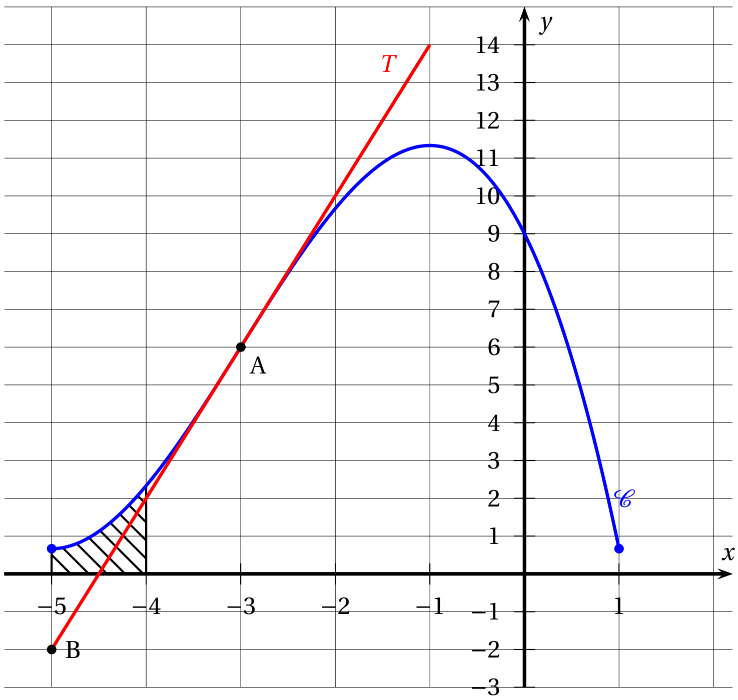
   A. $f'(-3) = 6$ **B.** $\boxed{f'(-3) = 4}$ **C.** $f'(-3) = \dfrac{1}{4}$ **D.** $f'(-3) = \dfrac{1}{6}$

   $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point de la courbe d'abscisse -3 donc au point A ; c'est donc la droite (AB) ; $f'(-3) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-6}{-5-(-3)} = 4$

2. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. Alors :

   A. $f''(-3) = 6$ **B.** $f''(-3) = 4$ **C.** $\boxed{f''(-3) = 0}$ **D.** $f''(-3) = \dfrac{1}{4}$

   La courbe admet un point d'inflexion en A d'abscisse -3 donx $f''(-3) = 0$.



3. La fonction f est :

A. $\boxed{\text{convexe sur } [5\ ;\ -3]}$ **B.** convexe sur $[-5\ ;\ -1]$
C. convexe sur $[-3\ ;\ 1]$ **D.** concave sur $[-5\ ;\ 1]$

Sur l'intervalle $[5\ ;\ -3]$ la courbe est au dessus de ses tangentes donc f est convexe sur cet intervalle.

4. La fonction dérivée f' est :

A. $\boxed{\text{décroissante sur } [-3\ ;\ -1]}$ **B.** croissante sur $[-3\ ;\ -1]$
C. croissante sur $[-1\ ;\ 1]$ **D.** croissante sur $[-5\ ;\ -1]$

Il suffit d'imaginer les coefficients directeurs des tangentes à la courbe pour les points dont les abscisses sont comprises entre -3 et -1.
On pourrait même dire que la fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.

5. Toute primitive F de la fonction f est :

A. décroissante sur $[-5\ ;\ 1]$ **B.** $\boxed{\text{croissante sur } [-5\ ;\ 1]}$
C. constante sur $[-5\ ;\ 1]$ **D.** décroissante sur $[-1\ ;\ 1]$

Une primitive F de la fonction f a pour dérivée cette fonction f qui est positive sur $[-5\ ;\ 1]$; donc la fonction F est croissante sur cet intervalle.

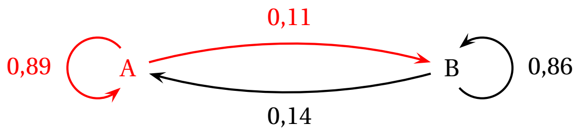
6. On note $I = \displaystyle\int_{-5}^{-4} f(x)\,\mathrm{d}x$. Alors :

A. $-2 \leqslant I \leqslant 0$ **B.** $-5 \leqslant I \leqslant -4$ **C.** $\boxed{0 < I \leqslant 2}$ **D.** $2 < I < 4$

La fonction f est positive sur $[-5\ ;\ -4]$ donc l'intégrale I est positive et est égale à l'aire du domaine hachuré sur la figure qui, sachant que chaque carreau a une aire de 1, est inférieure à 2.

EXERCICE 3 — Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

1. a. On représente la situation décrite dans l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B :



b. D'après le texte : $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0{,}89a_n + 0{,}14b_n \\ b_{n+1} & = & 0{,}11a_n + 0{,}86b_n \end{array}\right.$ donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}89 & 0{,}11 \\ 0{,}14 & 0{,}86 \end{pmatrix}$

La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0{,}89 & 0{,}11 \\ 0{,}14 & 0{,}86 \end{pmatrix}$.

c. La répartition des jeunes abonnés selon leur choix d'emprunt, en février 2016 est :

$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}89 & 0{,}11 \\ 0{,}14 & 0{,}86 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \times 0{,}89 + 0{,}2 \times 0{,}14 & 0{,}8 \times 0{,}11 + 0{,}2 \times 0{,}86 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0{,}74 & 0{,}26 \end{pmatrix}$ donc 74 % pour un livre et 26 % pour un DVD.

La répartition des jeunes abonnés selon leur choix d'emprunt, en mars 2016 est :

$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}74 & 0{,}26 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}89 & 0{,}11 \\ 0{,}14 & 0{,}86 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}74 \times 0{,}89 + 0{,}26 \times 0{,}14 & 0{,}74 \times 0{,}11 + 0{,}26 \times 0{,}86 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0{,}695 & 0{,}305 \end{pmatrix}$ donc 69,5 % pour un livre et 30,5 % pour un DVD.

2. a. D'après le texte, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}89a_n + 0{,}14b_n$.

b. D'après le contexte, pour tout n, $a_n + b_n = 1$.

Donc $a_{n+1} = 0{,}89a_n + 0{,}14b_n \implies a_{n+1} = 0{,}89a_n + 0{,}14(1 - a_n) \iff a_{n+1} = 0{,}89a_n + 0{,}14 - 0{,}14a_n \iff$ $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 0{,}14$ pour tout entier naturel n.

c. Pour déterminer au bout de combien de mois le pourcentage de jeunes abonnés empruntant un livre deviendra pour la première fois strictement inférieur à 60 %, on décide de programmer un algorithme que l'on complète :

Initialisation
  a prend la valeur 0,8
  ~~n prend la valeur 1~~
  n prend la valeur 0
Traitement
  Tant que $a \geqslant 0{,}6$
    a prend la valeur $0{,}75 \times a + 0{,}14$
    n prend la valeur $n + 1$
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher n

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = a_n - 0{,}56$ donc $a_n = u_n + 0{,}56$.

a.
- $u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}56 = 0{,}75a_n + 0{,}14 - 0{,}56 = 0{,}75(u_n + 0{,}56) - 0{,}42 = 0{,}75u_n + 0{,}42 - 0{,}42 = 0{,}75u_n$
- $u_0 = a_0 - 0{,}56 = 0{,}80 - 0{,}56 = 0{,}24$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}75$ et de premier terme $u_0 = 0{,}24$.

b. On en déduit que, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 0{,}24 \times 0{,}75^n$.

Comme $a_n = u_n + 0{,}56$, on en déduit que $a_n = 0{,}24 \times 0{,}75^n + 0{,}56$.

c. On résout l'inéquation $a_n < 0,6$:

$$\begin{aligned}
a_n < 0,6 &\iff 0,24 \times 0,75^n + 0,56 < 0,6\\
&\iff 0,24 \times 0,75^n < 0,04\\
&\iff 0,75^n < \dfrac{0,04}{0,24}\\
&\iff \ln\left(0,75^n\right) < \ln\left(\dfrac{0,04}{0,24}\right) && \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;\,+\infty[\\
&\iff n \times \ln(0,75) < \ln\left(\dfrac{0,04}{0,24}\right) && \text{propriété de la fonction ln}\\
&\iff n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,04}{0,24}\right)}{\ln(0,75)} && \text{car } \ln(0,75) < 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{0,04}{0,24}\right)}{\ln(0,75)} \approx 6,2$ donc $n \geqslant 7$.

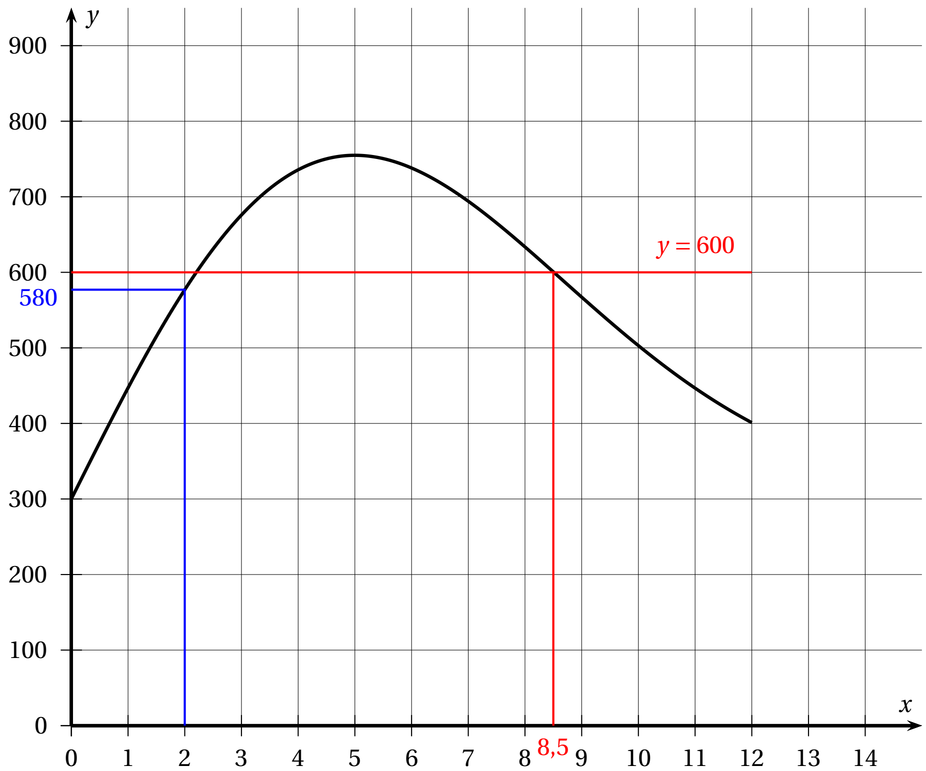
À partir du rang $n = 7$ donc du mois d'août, le pourcentage d'abonnés qui choisissent d'emprunter un livre est inférieur à 60 %.

d. La suite (u_n) est géométrique de raison 0,75 ; or $0 < 0,75 < 1$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

Pour tout n, $a_n = u_n + 0,56$ donc la suite (a_n) est convergente et a pour limite 0,56.

À long terme, on peut penser que la probabilité qu'un jeune abonné choisisse d'emprunter un livre sera de 56 %.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 6 points



Partie A

On répond aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. Après avoir parcouru 2 kilomètres, les randonneurs se trouvent à une altitude d'environ 580 mètres.
2. Dans la partie descendante de cette randonnée, l'organisatrice a prévu de faire une pause avec les participants, dans un refuge situé à 600 mètres d'altitude.
   Les randonneurs auront alors parcouru environ 8,5 kilomètres.
3. À la fin du chemin de randonnée, les randonneurs seront à une altitude d'environ 400 mètres, alors qu'ils étaient partis d'une altitude de 300 mètres ; ils ne reviennent donc pas à leur point de départ.

Partie B

Une modélisation du parcours proposé permet d'affirmer que la fonction f est définie sur $[0\,;\,12]$ par :
$f(x) = 150x\,\text{e}^{-0,02x^2} + 300$.

1. On admet que, pour tout x de $[0\,;\,12]$, $f'(x) = \left(150 - 6x^2\right)\text{e}^{-0,02x^2}$.
   - On sait que, pour tout réel x, $\text{e}^{-0,02x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $150 - 6x^2$.
   - $150 - 6x^2 = 6\left(25 - x^2\right) = 6(5 - x)(5 + x)$; or $5 + x > 0$ sur $[0\,;\,12]$ donc $f'(x)$ est du signe de $5 - x$.
   - On en déduit que :
     - $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,5[$;

- $f'(5)=0$;
- $f'(x)<0$ sur $]5\,;\,12]$.

$f(0)=300$, $f(5)=750\,\text{e}^{-0,5}+300\approx 755$ et $f(12)=1\,800\,\text{e}^{-2,88}+300\approx 401$

On construit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		5		12
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	300	↗	$f(5)$	↘	$f(12)$

2. L'altitude maximale atteinte au bout de 5 kilomètres par les randonneurs est $f(5)$ soit environ 755 mètres,

3. On cherche x tel que $f(x)=350$.

On complète le tableau de variations de f en arrondissant les valeurs au mètre :

x	0	α		5		12
$f(x)$	300	350	↗	755	↘	401

D'après le tableau de variations, l'équation $f(x)=350$ admet une seule solution α dans l'intervalle $[0\,;\,12]$ donc les randonneurs n'atteindront l'altitude de 350 mètres qu'une seule fois.

$\left.\begin{array}{l} f(0,3)\approx 345<350 \\ f(0,4)\approx 360>350 \end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha\in\,]0,3\,;\,0,4[$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} f(0,33)\approx 349<350 \\ f(0,34)\approx 351>350 \end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha\in\,]0,33\,;\,0,34[$

$\left.\begin{array}{l} f(0,334)\approx 349,99<350 \\ f(0,335)\approx 350,14>350 \end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha\in\,]0,334\,;\,0,335[$

L'altitude de 350 mètres est atteinte au bout d'environ 0,334 kilomètre, soit 334 mètres.

4. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,12]$ par : $F(x)=300x-3\,750\,\text{e}^{-0,02x^2}$.

$F'(x)=300-3\,750\times(-0,02\times 2x)\,\text{e}^{-0,02x^2}=300+150x\,\text{e}^{-0,02x^2}=f(x)$

donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$.

5. L'ascension a lieu entre le kilomètre 0 et le kilomètre 5 donc la valeur de l'altitude moyenne de la phase d'ascension de cette randonnée est :

$$\frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)\,\text{d}x=\frac{1}{5}\Big[F(x)\Big]_0^5=\frac{1}{5}\Big[F(5)-F(0)\Big]=\frac{1}{5}\Big[\left(1\,500-3\,750\,\text{e}^{-0,5}\right)-(-3\,750)\Big]=\frac{1}{5}\left(5\,250-3\,750\,\text{e}^{-0,5}\right)$$

$$=1\,050-750\,\text{e}^{-0,5}\approx 595$$

L'altitude moyenne pendant l'ascension est donc de 595 mètres.