Math93.com

Baccalauréat 2017 - ES
Nouvelle Calédonie

Série ES Spécialité
Mars 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Probabilités — 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

À l'occasion de la fête des Mères, un fleuriste décide de proposer à ses clients plusieurs types de bouquets spéciaux.

Partie A

Chaque bouquet spécial fête des Mères est composé uniquement d'œillets, uniquement de tulipes ou uniquement de marguerites. Chaque bouquet est composé de fleurs d'une même couleur, soit blanches, soit jaunes. Ce fleuriste a choisi de préparer 60 % de ces bouquets spéciaux avec uniquement des tulipes, 28 % avec uniquement des œillets, les autres bouquets ne comportant que des marguerites. On sait d'autre part que :

- *la moitié des bouquets confectionnés avec des tulipes sont de couleur jaune ; la proportion de bouquets de coloris jaune parmi les bouquets d'œillets est de un cinquième ; parmi les bouquets de marguerites, on compte un quart de jaunes.*

Un client entre dans le magasin. et achète au hasard un bouquet parmi les bouquets spéciaux « fête des Mères ». On note :

- *T l'évènement : « le bouquet acheté est un bouquet de tulipes » et O : « le bouquet acheté est un bouquet d'œillets » ;*
  M l'évènement : « le bouquet acheté est un bouquet de marguerites » et J : « les fleurs du bouquet acheté sont jaunes » ;
  B l'évènement : « les fleurs du bouquet acheté sont blanches ».

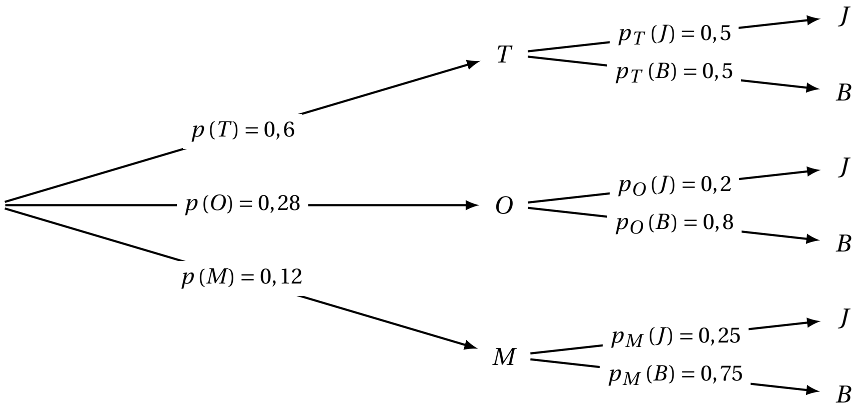
1. **Construire un arbre pondéré représentant la situation.**

   - « Ce fleuriste a choisi de préparer 60 % de ces bouquets spéciaux avec uniquement des tulipes, 28 % avec uniquement des œillets, les autres bouquets ne comportant que des marguerites. » donc :

   $$p(T) = 0,6,\ p(O) = 0,28 \text{ et } p(M) = 1 - 0,6 - 0,28 = 0,12$$

   - « la moitié des bouquets confectionnés avec des tulipes sont de couleur jaune ; la proportion de bouquets de coloris jaune parmi les bouquets d'œillets est de un cinquième ; parmi les bouquets de marguerites, on compte un quart de jaunes. » donc :

   $$p_T(J) = 0,5,\ p_O(J) = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ et } p_M(J) = \frac{1}{4} = 0,25$$



2. Calculer la probabilité que le client ait acheté un bouquet de tulipes blanches.
La probabilité cherchée est $P(T\cap B)$ et on obtient directement :

$$\boxed{p(T\cap B)=p(T)\times p_T(B)=0,6\times 0,5=\underline{0,3}}$$

3. Montrer que la probabilité de l'évènement B notée $p(B)$ est égale à 0,614.
Les évènements T, O et M forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
p(B)&=p(T\cap B)+p(O\cap B)+p(M\cap B)\\
p(B)&=0,3+p(O)\times p_O(B)+p(M)\times p_M(B)\\
p(B)&=0,3+0,28\times 0,8+0,12\times 0,75\\
p(B)&=\underline{0,614}
\end{aligned}$$

4. Sachant que les fleurs du bouquet acheté par ce client sont blanches, déterminer la probabilité que ce soit un bouquet d'œillets.
La probabilité cherchée est $P_B(O)$ or on a :

$$p_B(O)=\frac{p(B\cap O)}{p(B)}=\frac{p(O)\times p_O(B)}{0,614}=\frac{0,28\times 0,8}{0,614}\approx\underline{0,365}$$

Partie B

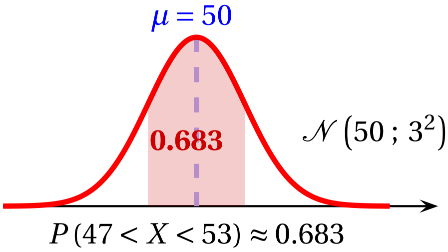
L'un des fournisseurs du fleuriste est un jardinier spécialisé dans la production d'une espèce de rosiers nommée « Arlequin ».
On note X la variable aléatoire qui, à chaque rosier de cette espèce pris au hasard, cultivé chez ce jardinier, associe sa hauteur exprimée en centimètres. On admet, d'après les observations et mesures réalisées, que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu=50$ et d'écart-type $\sigma=3$.

1. On choisit au hasard un rosier « Arlequin » chez ce fournisseur.

1. a. Déterminer la probabilité que ce rosier mesure entre 47 et 53 centimètres.

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu=50$ et d'écart-type $\sigma=3$.
La calculatrice nous donne alors arrondi à 10^{-3} près :

$$\boxed{X\sim\mathcal{N}\left(50\,;\,3^2\right)\Longrightarrow P\,(47<X<53)\approx\underline{0,683}}$$



> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*(47 , 53 , 50 , 3) ≈ $\underline{0,68268948}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*(47 , 53 , 50 , 3) *ou (fr.) normalfrép*(47 , 53 , 50 , 3)
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd ⇒ NormCD*(47 , 53, 3 , 50)

1. b. Déterminer la probabilité que ce rosier mesure plus de 56 centimètres.
La probabilité cherchée est $P(X\geqslant 56)$ or on a :

$$P(X\geqslant 56)=0,5-P(50\leq X\leq 56)\approx\underline{0,023}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 :* $\Big(0,5-$ *TIStat.normFDR*$(50\,,\,56\,,\,50\,,\,3)\Big)\approx\underline{0,02275006}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*(50 , 56 , 50 , 3) *ou (fr.) normalfrép*(50 , 56 , 50 , 3)
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd ⇒ NormCD*(50 , 56, 3 , 50)

2. **Le fournisseur veut prévoir quelle sera la hauteur atteinte ou dépassée par 80 % de ses rosiers « Arlequin ». Déterminer la hauteur cherchée (on l'arrondira au mm).**
On cherche la valeur de k telle que $P(X \geq k) = 0,8$ or :

$$P(X \geq k) = 0,8 \iff P(X < k) = 1 - 0,8 = 0,2$$

On cherche k tel que $P(X \leq k) = 0,2$ où X qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(50\,;\,3^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-1} près :

$$\boxed{P(X \leq k) = 0,2 \iff k \approx \underline{47,5}}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*(0.2 , 50 , 3) ≈ $\underline{47,475\,136}$
> - *Sur TI82/83+ : invNorm*(0.2 , 50 , 3) *ou (fr.) FracNormale*(0.2 , 50 , 3)
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN ⇒ InvNormCD*(0.2 , 3 , 50)

Remarque : puisque k et X sont exprimés en cm, on a arrondi au dixième .

Partie C

- **Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de* $n = 75$ *personnes. Il est constaté que* 59 *d'entre elles achèteront un bouquet* ». Donc la fréquence observée de personnes déclarant acheter un bouquet est

    $$f = 59 \div 75 \approx 0,786666666 \text{ soit } f \approx \underline{0,787}$$
  - ce fleuriste suppose que $p = 85\,\%$ de ses clients viendront ce jour-là acheter un des bouquets.
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 75$, $p = 85\,\%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 75 \geq 30 \\ \checkmark & np = 75 \times 0,85 = 63,75 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 75 \times 0,15 = 11,25 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,85 - 1,96\,\frac{\sqrt{0,85 \times 0,15}}{\sqrt{75}}\,;\, 0,85 + 1,96\,\frac{\sqrt{0,85 \times 0,15}}{\sqrt{75}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

> - $p - 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,76919$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0,769}$.
> - $p + 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,93081$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0,931}$.

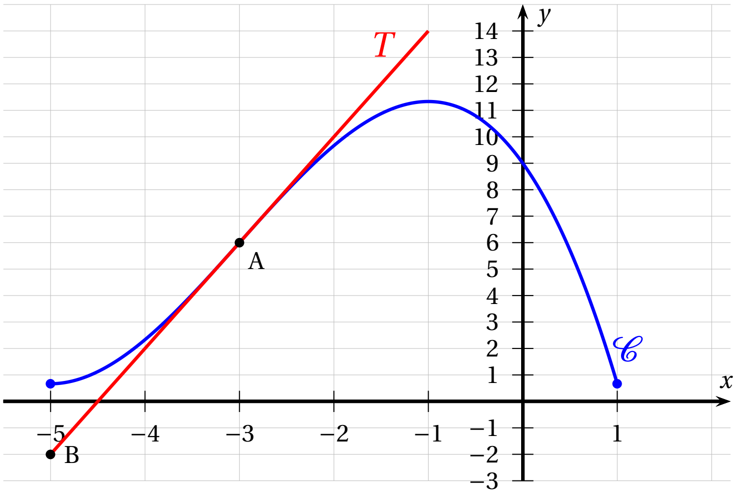
$$\boxed{I_{75} \approx [0,769\ ;\ 0,931]}$$

- **Conclusion**
La fréquence observée appartient à l'intervalle, $f \approx 0,787 \in I$ donc le résultat ne remet pas en cause son hypothèse.

Exercice 2. QCM 3 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

On a représenté dans le repère orthogonal ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ *d'une fonction* f *définie et deux fois dérivable sur l'intervalle* $[-5\,;\,1]$. *La droite* T *est la tangente à la courbe* $\mathscr{C}$ *au point* $A(-3\,;\,6)$ *et passe par le point* $(-5\,;\,-2)$. *Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe* $\mathscr{C}$ *sur* $[-5\,;\,1]$.



Question 1 (Réponse B)

On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Alors :

A. $f'(-3) = 6$ **B.** $\boxed{f'(-3) = 4}$ **C.** $f'(-3) = \dfrac{1}{4}$ **D.** $f'(-3) = \dfrac{1}{6}$

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -3 donc au point A.

Cette tangente est la droite (AB) avec $\begin{cases} A(-3;6) \\ B(-5;-2) \end{cases}$ donc :

$$f'(-3) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-6}{-5-(-3)} = 4$$

Question 2 (Réponse C)

On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. Alors :

A. $f''(-3) = 6$ **B.** $f''(-3) = 4$ **C.** $\boxed{f''(-3) = 0}$ **D.** $f''(-3) = \dfrac{1}{4}$

Preuve.
D'après les données, le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur $[-5\,;\,1]$. Or en ce point, la dérivée seconde d'une fonction deux fois dérivable s'annule en changeant de signe, de ce fait $f''(-3) = 0$.

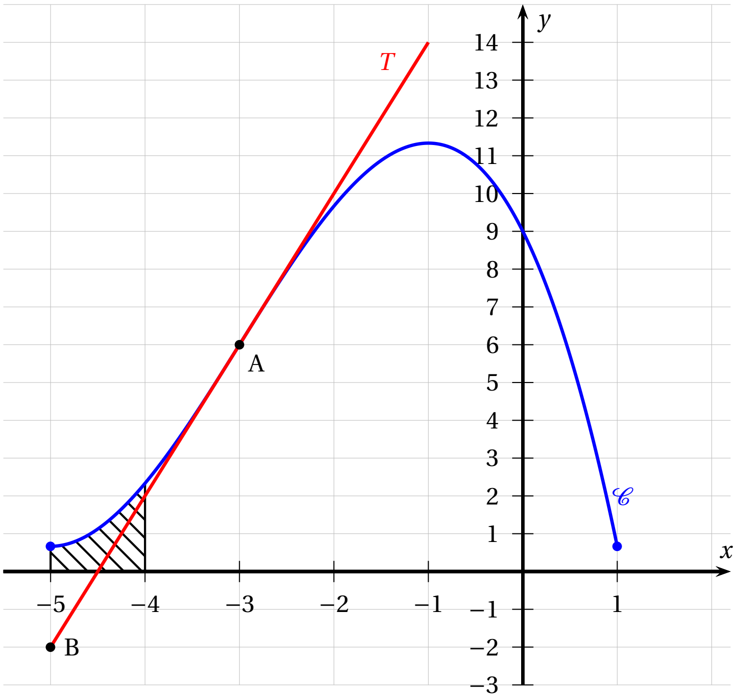
Question 3 (Réponse A)

La fonction f est :

A. $\boxed{\text{convexe sur } [-5\,;\,-3]}$ **B.** convexe sur $[-5\,;\,-1]$

C. convexe sur $[-3\,;\,1]$ **D.** concave sur $[-5\,;\,1]$

Preuve.
Sur l'intervalle $[-5\,;\,-3]$ la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de ses tangentes donc f est convexe sur cet intervalle.



Question 4 (Réponse A)

La fonction dérivée f' est :

$\boxed{\textbf{A. } \text{décroissante sur } [-3\,;\,-1]}$

B. croissante sur $[-3\,;\,-1]$

C. croissante sur $[-1\,;\,1]$

D. croissante sur $[-5\,;\,-1]$

Preuve.
On rappelle que pour tout réel a de l'intervalle $[-5\,;\,1]$, le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
Le problème consiste à visualiser les coefficients directeurs des tangentes à la courbe pour les points dont les abscisses sont comprises entre -3 et -1. Ces coefficients sont de plus en plus petit donc f' est décroissante sur l'intervalle $[-3\,;\,-1]$.

Question 5 (Réponse B)

Toute primitive F de la fonction f est :

A. décroissante sur $[-5\,;\,1]$

$\boxed{\textbf{B. } \text{croissante sur } [-5\,;\,1]}$

C. constante sur $[-5\,;\,1]$

D. décroissante sur $[-1\,;\,1]$

Preuve.
La fonction f étant supposée continue sur $[-5\,;\,1]$, elle y admet des primitives. Toute primitive de la fonction f vérifie la relation $F' = f$ donc les variation de F sont données par le signe de f qui est positive sur $[-5\,;\,1]$. Donc la fonction F est croissante sur cet intervalle.

Question 6 (Réponse C)

On note $I = \displaystyle\int_{-5}^{-4} f(x)\,\mathrm{d}x$. Alors :

A. $-2 \leqslant I \leqslant 0$

B. $-5 \leqslant I \leqslant -4$

$\boxed{\textbf{C. } 0 < I \leqslant 2}$

D. $2 < I < 4$

Preuve.
La fonction f est positive et continue sur $[-5\,;\,-4]$ donc l'intégrale I est positive et est égale à l'aire du domaine hachuré sur la figure qui, sachant que chaque carreau a une aire de 1, est inférieure à 2 et strictement supérieure à 0.

Exercice 3. Spécialité 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les jeunes abonnés (c'est-à-dire de moins de 12 ans) inscrits à une médiathèque se voient proposer une formule d'emprunt mensuel unique : chaque mois, chacun de ces abonnés peut choisir d'emprunter exclusivement soit un livre, soit un film en DVD. On suppose d'une part que le nombre d'inscrits ne varie pas et d'autre part que tous les abonnés de moins de 12 ans respectent cette formule et réalisent un emprunt chaque mois. Les statistiques réalisées lors des mois précédents permettent au responsable de la médiathèque de constater que l'on peut modéliser ainsi la situation : d'un mois à l'antre :

- 89 % des jeunes abonnés ayant choisi d'emprunter un livre, optent encore pour un livre le mois suivant ;
- parmi les jeunes abonnés ayant emprunté un film, 14 % changent le mois suivant en décidant de choisir un livre.

Lors du lancement de cette formule d'emprunt, en janvier 2016, 80 % des abonnés de moins de 12 ans empruntent un livre. Chaque mois, on choisit au hasard un abonné de moins de 12 ans, et pour tout entier naturel n, on note :

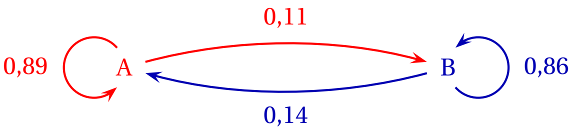
- *a_n la probabilité que cet abonné emprunte un livre le n-ième mois après janvier 2016 ; b_n la probabilité que cet abonné emprunte un film le n-ième mois après janvier 2016 ; $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le n-ième mois après janvier 2016. Ainsi : $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.*

1.

1. a. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, où A est l'état « le jeune abonné choisit d'emprunter un livre » ; B est l'état « le jeune abonné choisit d'emprunter un film ».

D'après les données :

- 89 % des jeunes abonnés ayant choisi d'emprunter un livre, optent encore pour un livre le mois suivant et parmi les jeunes abonnés ayant emprunté un film, 14 % changent le mois suivant en décidant de choisir un livre.
- On en déduit aussi que 100% − 89 % = 11% des jeunes abonnés ayant choisi d'emprunter un livre, optent pour un film le mois suivant et parmi les jeunes abonnés ayant emprunté un film, 100% − 14 % = 86% ne changent pas le mois suivant .



1. b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, en prenant les sommets A et B dans cet ordre.

Pour tout entier naturel n, la matrice de transition M associée au graphe vérifie la relation :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times M$$

La matrice de transition M est donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,89 & 0,11 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}}$$

1. c. Déterminer la répartition des jeunes abonnés selon leur choix d'emprunt, en février 2016 et en mars 2016.

- La répartition des jeunes abonnés selon leur choix d'emprunt, en février 2016 est :

$$\begin{aligned} P_1 = P_0 \times M &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,89 & 0,11 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,89 + 0,2 \times 0,14 & 0,8 \times 0,11 + 0,2 \times 0,86 \end{pmatrix} \\ P_1 &= \begin{pmatrix} 0,74 & 0,26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Donc en février 2016, 74 % pour un livre et 26 % pour un DVD.

- La répartition des jeunes abonnés selon leur choix d'emprunt, en mars 2016 est :

$$\begin{aligned} P_2 = P_1 \times M &= \begin{pmatrix} 0,74 & 0,26 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,89 & 0,11 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,74 \times 0,89 + 0,26 \times 0,14 & 0,74 \times 0,11 + 0,26 \times 0,86 \end{pmatrix} \\ P_2 &= \begin{pmatrix} 0,695 & 0,305 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Donc en mars 2016, 69,5 % pour un livre et 30,5 % pour un DVD.

2.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,89a_n + 0,14b_n$.

Pour tout entier naturel n, la matrice de transition M associée au graphe vérifie la relation :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times M$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,89 & 0,11 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,89a_n + 0,14b_n & 0,11a_n + 0,86b_n \end{pmatrix}$$

Soit pour tout entier naturel n, $\underline{a_{n+1} = 0,89a_n + 0,14b_n}$.

2. b. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,14$.

Pour tout entier naturel n on a $a_n + b_n = 1$, donc en utilisant la relation de la question précédente :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,89a_n + 0,14b_n \\ a_n + b_n = 1 \end{cases} \implies a_{n+1} = 0,89a_n + 0,14(1 - a_n)$$

Soit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \,;\ \underline{a_{n+1} = 0,75a_n + 0,14}$$

2. c. Pour déterminer au bout de combien de mois le pourcentage de jeunes abonnés empruntant un livre deviendra pour la première fois strictement inférieur à 60 %, on décide de programmer un algorithme. Modifier l'algorithme ci-dessous pour qu'il permette d'afficher la réponse à cette question.

```
INITIALISATION :  $a$ prend la valeur 0,8
                  $n$ prend la valeur 1
TRAITEMENT :      Tant que Tant que $a \geqslant 0,6$
                      $a$ prend la valeur $0,75 \times a + 0,14$
                      $n$ prend la valeur $n + 1$
                  Fin Tant que
SORTIE :          Afficher $n$
```

3. *Soit* (u_n) *la suite définie pour tout entier naturel n par :* $u_n = a_n - 0,56$.

3. a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,75 et préciser son terme initial.

Les suites (u_n) et (a_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 0,8 \\ u_{n+1} & = 0,75 \times u_n + 0,14 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (a_n) : \begin{cases} a_0 & \\ a_n & = u_n - 0,56 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_{n+1} - 0,56 \\ a_{n+1} &= (0,75\ u_n + 0,14)\ - 0,56 \\ a_{n+1} &= 0,75 \times u_n - 0,42 \\ a_{n+1} &= 0,75 \times \left(u_n + \frac{-0,42}{0,75} \right) \\ a_{n+1} &= 0,75 \times (u_n - 0,56) \\ a_{n+1} &= 0,75 \times a_n \end{aligned}$$

La suite (a_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,75$, et de premier terme $a_0 = 0,24$ puisque :

$$\begin{aligned} a_0 &= u_0 - 0,56 \\ a_0 &= 0,8 - 0,56 \\ a_0 &= 0,24 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 0,24 \\ a_{n+1} & = 0,75 \times a_n \end{cases} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. En déduire que, pour tout entier naturel n : $a_n = 0,24 \times 0,75^n + 0,56$.

La suite (a_n) est géométrique de raison $q = 0,75$, et de premier terme $a_0 = 0,24$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \, ; \; a_n = a_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \, ; \; a_n = 0,24 \times (0,75)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$a_n = u_n - 0,56$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = a_n + 0,56$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \, ; \; u_n = 0,24 \times (0,75)^n + 0,56}$$

3. c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $a_n < 0,6$ et interpréter le résultat dans le contexte.

On cherche à résoudre l'inéquation $a_n < 0,6$ dans l'ensemble des entiers naturels.

Pour tout entier naturels n :

$$\begin{aligned} a_n < 0.60 &\Longleftrightarrow 0{,}24 \times 0.75^n + 0{,}56 < 0.60 \\ &\Longleftrightarrow 0{,}24 \times 0.75^n < 0{,}04 \\ &\Longleftrightarrow 0.75^n < \frac{0{,}04}{0{,}24} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

En composant par la fonction $x \longmapsto \ln x$ définie et strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$a_n < 0.60 \Longleftrightarrow \ln 0.75^n < \ln \frac{1}{6}$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$a_n < 0.60 \Longleftrightarrow n \ln 0.75 < \ln \frac{1}{6}$$

En divisant chaque membre par $\ln 0.75 < 0$, l'ordre change et :

$$a_n < 0.60 \Longleftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{6}}{\ln 0.75} \approx 6.23$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 7.

Interprétation : À partir du rang $n = 7$ donc du mois d'août, le pourcentage d'abonnés qui choisissent d'emprunter un livre est inférieur à 60%.

3. d. À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'un jeune abonné choisisse d'emprunter un livre ?

- La suite (u_n) est géométrique de raison $0,75$ comprise strictement entre 0 et 1 $(0 < 0,75 < 1)$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.
- Pour tout n, $a_n = u_n + 0,56$ donc la suite (a_n) est convergente et a pour limite 0,56.

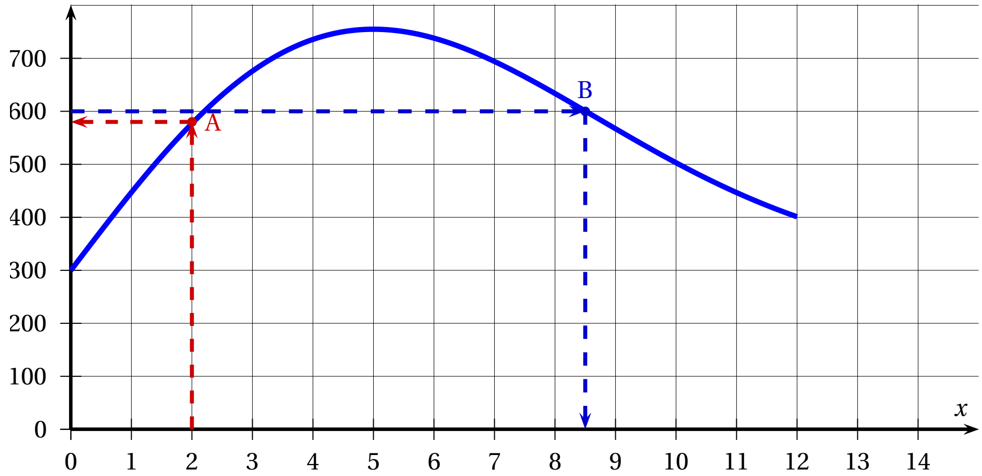
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \\ a_n = u_n + 0,56 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,56$$

À long terme, on peut penser que la probabilité qu'un jeune abonné choisisse d'emprunter un livre sera de 56%.

Exercice 4. Fonction 6 points

Commun à tous les candidats

L*a directrice d'une association sportive décide de proposer à ses adhérents une randonnée pédestre, longue de 12 km, sur des sentiers de montagne. Afin que les membres de son association puissent décider de participer ou non à cette randonnée en fonction de leur niveau et de leur condition physique, elle leur envoie le graphique ci-dessous avant de procéder aux inscriptions.*
Dans un repère orthogonal, cette courbe représente la fonction f définie sur [0 ; 12] donnant l'altitude du parcours en fonction du nombre de kilomètres effectués depuis le départ. Ainsi x est la distance parcourue, en kilomètres, depuis le point de départ de la randonnée : $x \in [0\,;\,12]$ et $f(x)$ est l'altitude en mètres, à laquelle se situe le chemin de randonnée au bout de x km parcourus.



Partie A

1. **À quelle altitude se situent les randonneurs après avoir parcouru 2 kilomètres ?**
   Après avoir parcouru 2 kilomètres, les randonneurs se trouvent à une altitude d'environ 580 mètres. On lit l'ordonnée du point A d'abscisse 2.

2. D**ans la partie descendante de cette randonnée, l'organisatrice a prévu de faire une pause avec les participants, dans un refuge situé à 600 mètres d'altitude. Quelle distance auront-ils alors parcourue depuis le départ ?**
   Les randonneurs auront alors parcouru environ 8,5 kilomètres. On lit l'abscisse du point B d'ordonnée 600.

3. **À la fin du chemin de randonnée, les randonneurs seront-ils revenus à leur point de départ ? Justifier la réponse.**
   À la fin du chemin de randonnée, les randonneurs seront à une altitude d'environ 400 mètres, alors qu'ils étaient partis d'une altitude de 300 mètres ; ils ne reviennent donc pas à leur point de départ.

Partie B

Dans toute cette partie, les réponses devront être justifiées. Aucune lecture graphique ne sera considérée comme une justification valable. Une modélisation du parcours proposé permet d'affirmer que f est définie sur [0 ; 12] par : $f(x) = 150x\mathrm{e}^{-0,02x^2} + 300$.

1. **On note f' la dérivée de la fonction f et on admet que pour tout $x \in [0\,;\,12]$ on a $f'(x) = \left(150 - 6x^2\right)\mathrm{e}^{-0,02x^2}$. Déterminer le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f sur [0 ; 12].**

   - La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la dérivée f' est du signe du facteur $(150-6x^2)$ sur [0 ; 12].
   - Le facteur $(150-6x^2)$ est une expression du second degré dont les racines sont -5 et 5 sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction polynôme du second degré $x \longmapsto (150-6x^2)$ est donc du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racine soit négative et positive ailleurs. Donc sur l'intervalle [0 ; 12] on obtient :

x	0		α		5		12
Signe de $f'(x)$			$+$		0	$-$	
Variations de f	300	↗	350	↗	$750\,\mathrm{e}^{-0.5}+300 \approx 755$	↘	$1800\,\mathrm{e}^{-\frac{72}{75}}+300 \approx 401$

2. **Quelle sera, au mètre près, l'altitude maximale atteinte par les randonneurs ? Au bout de quelle distance parcourue depuis le départ ?**
L'altitude maximale atteinte au bout de 5 kilomètres par les randonneurs est $f(5)$ soit environ 755 mètres.

3. **L'un des participants de cette randonnée affirme : « *Dans ce parcours, nous n'atteindrons qu'une seule fois une altitude de* 350 *m* ». Démontrer que cette affirmation est vraie, et donner une valeur approchée, arrondie au mètre près, de la distance qu'auront parcourue les randonneurs depuis le départ pour parvenir à cette altitude.**

Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

***Remarque** : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- **Sur l'intervalle [5; 12]**
  Sur cet intervalle, la fonction f est décroissante et atteint son minimum en 12 qui est $f(12) \approx 401 > 350$. L'équation $f(x) = 350$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle.
- **Application du corollaire sur [0; 5]** :
  - La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[0; 5]$;
  - Le réel $k = 350$ est compris entre $f(0) = 300$ et $f(5) = 750\,\mathrm{e}^{-0.5} + 300 \approx 755$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $f(x) = 350$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0; 5]$.
- **Valeur approchée** .
  Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta = 0.001$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0,334) & \approx & 349,99 < 350 \\ f(0,335) & \approx & 350,14 > 350 \end{array}\right| , \quad \text{donc } 0,334 < \alpha < 0,335.$$

Une valeur approchée de α au mètre près est donc $\alpha \approx 0,334$ km.

4. **Soit F la fonction définie sur [0; 12] par : $F(x) = 300x - 3\,750\mathrm{e}^{-0,02x^2}$. Montrer que F est une primitive de f.**
La fonction F est définie et dérivable sur $[0; 12]$. Elle est de la forme $u + 3750\,\mathrm{e}^{\,v}$ donc de dérivée $u' + 3750\,\mathrm{e}^{\,v} \times v'$ avec

$u(x) = 300x$	$u'(x) = 300$
$v(x) = -0,02x^2$	$v'(x) = -0,02x \times 2 = -0,04x$

Pour tout réel x de $[0; 12]$:

$$F'(x) = 300 - 3\,750\mathrm{e}^{-0,02x^2} \times \left(-0,04x\right) = 150x\,\mathrm{e}^{-0,02x^2} + 300 = f(x)$$

On a donc montré que $F' = f$ donc que F est une primitive de f.

5. **Quelle est la valeur de l'altitude moyenne de la phase d'ascension de cette randonnée ? (Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée arrondie au mètre près).**
La valeur de l'altitude moyenne de la phase d'ascension de cette randonnée est donnée par la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$ donc par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\Big[F(x)\Big]_0^5 = \frac{1}{5}\Big[F(5) - F(0)\Big] \\ = \frac{1}{5}\Big[\left(1\,500 - 3\,750\,\mathrm{e}^{-0,5}\right) - (-3\,750)\Big] \\ = \frac{1}{5}\left(5\,250 - 3\,750\,\mathrm{e}^{-0,5}\right) \\ = 1\,050 - 750\,\mathrm{e}^{-0,5} \approx 595 \end{aligned}$$

L'altitude moyenne pendant l'ascension est donc de 595 mètres.

Fin du devoir