

Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Nord
2 juin 2017

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x$. On note f' sa fonction dérivée.

On a alors : pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

- a. $f'(x) = 0$ b. $f'(x) = \ln(x)$ c. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ d. $f'(x) = \frac{1}{x} - x$

2. Les entiers naturels n vérifiant l'inéquation $6 \times 0,95^n - 1 \leq 2$ appartiennent à l'intervalle :

$$\begin{aligned}
 6 \times 0,95^n - 1 \leq 2 &\iff 6 \times 0,95^n \leq 3 \iff 0,95^n \leq \frac{3}{6} \iff 0,95^n \leq 0,5 \\
 \iff \ln(0,95^n) \leq \ln(0,5) &\iff n \times \ln(0,95) \leq \ln(0,5) \iff n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} \text{ car } \ln(0,95) < 0
 \end{aligned}$$

- a. $]-\infty; \frac{\ln 3}{\ln(5,7)}]$ b. $]-\infty; \ln\left(\frac{0,5}{0,95}\right)]$ c. $]-\infty; \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}]$ d. $\left[\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}; +\infty\right[$

3. Une entreprise fabrique des tubes métalliques de longueur 2 m.

Un tube métallique est considéré comme étant dans la norme si sa longueur est comprise entre 1,98 m et 2,02 m. On prélève au hasard un échantillon de 1000 tubes, on observe que 954 tubes sont dans la norme.

On détermine un intervalle de confiance au seuil de 95 % : $I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

On a $f = \frac{954}{1000} = 0,954$. Les trois conditions sont réalisées : $n = 1000 \geq 30$, $n \times f = 954 \geq 5$ et $n \times (1 - f) = 46 \geq 5$.

Donc : $I_{1000} = \left[0,954 - \frac{1}{\sqrt{1000}}; 0,954 + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right] \approx [0,922; 0,986]$

L'intervalle de confiance de la fréquence des tubes dans la norme pour cette entreprise au niveau de confiance de 95 %, avec les bornes arrondies à 10^{-3} , est :

- a. $[0,922; 0,986]$ b. $[0,947; 0,961]$ c. $[1,98; 2,02]$ d. $[0,953; 0,955]$

4. Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est de 0,8. Les tirs sont supposés indépendants.

On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où l'archer touche la cible. L'expérience est répétée 6 fois. Les lances sont indépendants, identiques et aléatoires. A chaque tir il y a deux issues : il touche la cible, avec une probabilité de 0,8, ou il ne la touche pas. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0,8$.

On veut déterminer $P(X = 3)$: $P(X = 3) = \binom{6}{3} \times 0,8^3 \times 0,2^3 = 0,08192$

Quelle est la probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs ?

- a. 0,512 b. 2,4 c. 0,262 144 d. 0,081 92

Exercice 2

5 points

Commun à tous les candidats

1. a. En juin 2017, on peut estimer qu'il y aura $27500 - 150 = 27350$ étudiants dans cette université.
 b. Á la rentrée de septembre 2017, il y aura à la suite de l'augmentation de 4 % :
 $1,04 \times 27350 = 28444$ étudiants.
2. Soit u_n le nombre d'étudiants en septembre de l'année 2016+n. En juin de l'année suivante (année $(n + 1)$), 150 étudiants auront démissionné, pour une reste de $u_n - 150$. Puis à la rentrée de septembre de l'année $(n + 1)$, le nombre d'étudiants aura subi une augmentation de 4 %, soit $1,04 \times (u_n - 150) = 1,04 \times u_n - 156$. Donc en Septembre de l'année $(n + 1)$ il y aura $1,04u_n - 156$ étudiants,
 soit pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$.
3. Recopier et compléter les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

- L1 Variables : n est un nombre entier naturel
- L2 U est un nombre réel
- L3 Traitement : n prend la valeur 0
- L4 U prend la valeur 27 500
- L5 Tant que $U \leq 33\ 000$ faire
- L6 n prend la valeur $n + 1$
- L7 U prend la valeur $1,04 \times U - 156$
- L8 Fin Tant que
- L9 Sortie : Afficher n

4. a. On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
 Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de U	27 500	28 444	29 426	30 447	31 509	32 613	33 762

- b. La valeur affichée en sortie de cet algorithme est : $n = 6$.
5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n .
 Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 3900$.
 - a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3900 = 1,04 \times u_n - 156 - 3900 = 1,04 \times u_n - 4056 = 1,04(u_n - 3900) = 1,04v_n$.
 La suite (v_n) est donc géométrique de raison 1,04 et de premier terme $v_0 = 27500 - 3900 = 23600$.
 - b. Donc pour tout entier n , $v_n = v_0 \times q^n = 23600 \times 1,04^n$.
 De plus, On a $u_n = v_n + 3900$ donc $u_n = 3900 + 23600 \times 1,04^n$
 - c. La suite (v_n) est une suite géométrique de $q = 1,04$. $q > 1$ donc la limite de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini est égale à l'infini. Donc la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini est aussi égale à l'infini. Le nombre d'étudiants de cette université ne se stabilisera jamais, et continuera à augmenter à l'infini dépassant toute limite de capacité que l'on souhaiterait imposer.

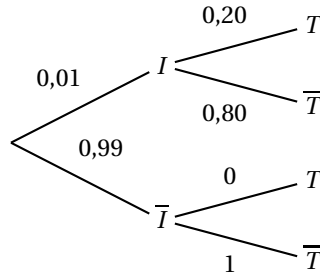
Exercice 3

5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

PARTIE A

1. L'arbre de probabilités ci-dessous :



2. Formule de Bayes : $p(I \cap \bar{T}) = p_I(\bar{T}) \times p(I) = 0,01 \times 0,80 = 0,008$

3. Formule de probabilités totales :

$$p(T) = p(T \cap I) + p(T \cap \bar{I}) = p_I(T) \times p(I) + p_{\bar{I}}(T) \times p(\bar{I}) = 0,01 \times 0,20 + 0,99 \times 0 = 0,002.$$

PARTIE B

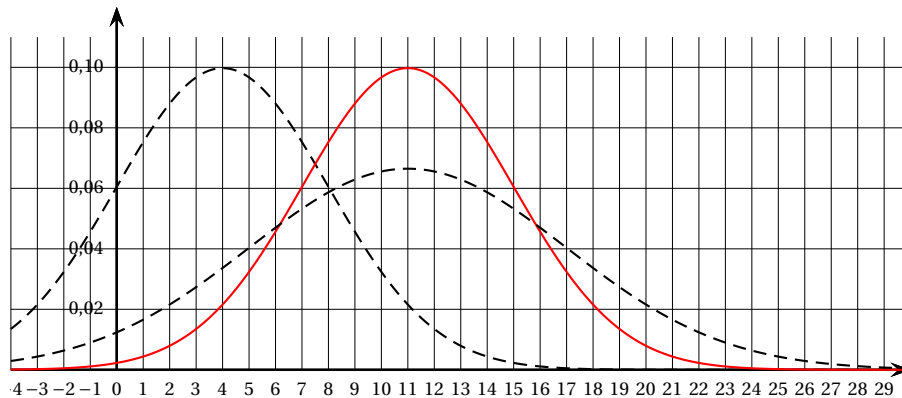
1. $p(9 \leq X \leq 13) \approx 0,383$ (à l'aide de la calculatrice).

2. $p(X \leq 6) = 0,5 - p(6 \leq X \leq 11) \approx 0,106$ (à l'aide de la calculatrice).

3. A l'aide de la touche inverse loi normale de la calculatrice on trouve que $a \approx 15$ pour que $P(X \leq a) = 0,84$. Cela signifie donc que 84% des personnes atteintes de la maladie cœliaque ont attendu au plus 15 pour être diagnostiqué après l'apparition des premiers symptômes.

4. D'après le cours, nous savons que : $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

Donc cela donne : $P(11 - 3 \times 4 \leq X \leq 11 + 3 \times 4) \approx 0,997$ soit $P(-1 \leq X \leq 23) \approx 0,997$. Ce la correspond donc à la courbe en rouge.



Exercice 3

5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Le graphe possède 9 sommets, il est donc d'ordre 9.

- b. La chaîne D-M-H-R-B-V-G-L-J permet de passer par tous les sommets ; le graphe est donc connexe.
 - c. Les sommets H et G ne sont pas adjacents. Le graphe n'est pas complet.
2. Le graphe possède plus de deux sommets (cinq sommets) de degré impair donc il ne possède pas de chaîne eulérienne. Sarah ne pourra pas emprunter toutes les routes une et une seule fois.

3. a.
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b. Le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D est $M(1,2)^4 = 3$. Il s'agit des chemins : B-R-H-M-D, B-V-L-M-D et B-V-J-M-D.
4. A l'aide de l'algorithme de Dijkstra on obtient le tableau suivant :

Sommets	B	D	G	H	J	L	M	R	V
B	0	∞	∞	272 (R)	∞	∞	∞	50 (B)	220 (B)
R	×	∞	150 (R)	272 (R)	∞	∞	∞	×	220 (B)
G	×	∞	×	272 (R)	∞	291 (G)	∞	×	220 (B)
V	×	∞	×	272 (R)	412 (V)	291 (G)	670 (V)	×	×
H	×	∞	×	×	412 (V)	291 (G)	567 (H)	×	×
L	×	∞	×	×	412 (V)	×	567 (H)	×	×
J	×	∞	×	×	×	×	567 (H)	×	×
M	×	617 (M)	×	×	×	×	×	×	×

Le plus court chemin permettant d'aller de B à D est le chemin B-R-H-M-D. Il faut parcourir 617 km.

Exercice 4**6 points****Commun à tous les candidats**Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,7; 6]$; on suppose que f est dérivable.**PARTIE A : Étude graphique**

- Le coefficient directeur de la droite (AB) est : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 4}{4 - 3} = -4$. Donc $f'(3) = -4$.
- La fonction f est décroissante sur les intervalles $[0,7; 1]$ et sur $[2; 6]$; elle est croissante sur l'intervalle $[1; 2]$. On peut donc en déduire le signe de f' sur l'intervalle $[0,7; 6]$.

x	0,7	1	2	6	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

PARTIE B : Étude théorique

- $f'(x) = (2x - 2) \times e^{-2x+6} + (x^2 - 2x + 1) \times (-2)e^{-2x+6} = (2x - 2 - 2x^2 + 4x - 2) \times e^{-2x+6} = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$.
- Pour tout $x \in [0,7; 6]$, $e^{-2x+6} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que le trinôme du second degré $-2x^2 + 6x - 4$.

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 4, \text{ donc deux solutions } x_1 = \frac{-6 - 2}{-4} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-6 + 2}{-4} = 1.$$

En utilisant le signe du trinôme du second degré, on établit le tableau de variations suivant :

x	0,7	1	2	6	
$-2x^2 + 6x - 4$	-	0	+	0	-
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$				e^2	

- La ligne 3 donne la forme factorisée de la dérivée seconde f'' . On en déduit que pour tout $x \in [0,7; 7]$, $f''(x)$ a le même signe que le trinôme du second degré $2x^2 - 8x + 7$. La ligne 4 permet de déterminer les solutions de l'équation $f''(x) = 0$, ce qui nous donne les racines du trinôme. En utilisant le signe du trinôme du second degré, on en déduit que $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in \left[\frac{-\sqrt{2} + 4}{2}; \frac{\sqrt{2} + 4}{2} \right]$.
 - Avec les mêmes lignes, on peut aussi en déduire que la dérivée seconde f'' s'annule et change de signe pour les deux valeurs $x_1 = \frac{-\sqrt{2} + 4}{2}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{2} + 4}{2}$. La courbe représentative de la fonction f admet donc deux points d'inflexion aux points d'abscisses données précédemment.
 - On pose $I = \int_3^5 f(x) dx$.

On utilise à présent la ligne 5 : $I = \int_3^5 f(x) dx = F(5) - F(3)$

$$F(5) = \frac{1}{4}(-50 + 10 - 1)e^{-4} = -\frac{41}{4}e^{-4} \text{ et } F(3) = \frac{1}{4}(-18 + 6 - 1)e^0 = -\frac{13}{4}$$

$$I = -\frac{41}{4}e^{-4} - \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{13 - 41e^{-4}}{4} \approx 3,1$$