Math93.com

Baccalauréat 2017 - ES/L Amérique du Nord

Série ES/L Obli. et Spé.
2 Juin 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. — 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Question 1 (Réponse b)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x$. On note f' sa fonction dérivée. On a alors :

a. $f'(x) = 0$ **b.** $\boxed{f'(x) = \ln(x)}$ **c.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ **d.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - x$

Preuve.

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x \times \ln(x) - x \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
La fonction f est de la forme $uv + w$ donc de dérivée $u'v + uv' + w'$ avec :

$$\forall x \in\,]0\,;+\infty[\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x) + w(x)\ :\ \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = x & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x) & ; & v'(x) = \dfrac{1}{x} \\ w(x) = -x & ; & w'(x) = -1 \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in\,]0\,;+\infty[,\ \ f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) + w'(x) \\ f'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ f'(x) &= \ln x + 1 - 1 \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in\,]0\,;+\infty[\ ;\ f'(x) = \ln x}$$

Question 2 (Réponse d)

Les entiers naturels n vérifiant l'inéquation $6 \times 0,95^n - 1 \leqslant 2$ appartiennent à l'intervalle :

a. $\left]-\infty\,;\,\dfrac{\ln 3}{\ln(5,7)}\right]$ **b.** $\left]-\infty\,;\,\ln\left(\frac{0,5}{0,95}\right)\right]$ **c.** $\left]-\infty\,;\,\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}\right]$ $\boxed{\textbf{d. } \left[\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}\,;\,+\infty\right[}$

Preuve.

$$6 \times 0,95^n - 1 \leqslant 2 \Longleftrightarrow 0,95^n \leq \frac{3}{6} = 0,5$$

On compose alors par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} 6 \times 0,95^n - 1 \leqslant 2 &\Longleftrightarrow \ln 0,95^n \leq \ln 0,5 \\ &\Longleftrightarrow n \ln 0,95 \leq \ln 0,5 \end{aligned}$$

On divise les deux membres par ln 0,5 qui est négatif (l'ordre change)

$$6 \times 0,95^n - 1 \leqslant 2 \Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,5}{\ln 0,95} \approx 13,513$$

Les entiers naturels n vérifiant l'inéquation $6 \times 0,95^n - 1 \leqslant 2$ appartiennent à l'intervalle : $\left[\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}\,;\,+\infty\right[$. Ce sont les entiers supérieurs ou égaux à 14.

Question 3 (Réponse a)

Une entreprise fabrique des tubes métalliques de longueur 2 m. Un tube métallique est considéré comme étant dans la nonne si sa longueur est comprise entre 1,98 m et 2,02 m. On prélève au hasard un échantillon de 1 000 tubes, on observe que 954 tubes sont dans la norme. L'intervalle de confiance de la fréquence des tubes dans la norme pour cette entreprise au niveau de confiance de 95 %, avec les bornes arrondies à 10^{-3}, est :

$\boxed{\textbf{a. } [0,922\,;\,0,986]}$ **b.** $[0,947\,;\,0,961]$ **c.** $[1,98\,;\,2,02]$ **d.** $[0,953\,;\,0,955]$

Preuve.

- **Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de* $n = 1000$ *tubes. Il est constaté que* 954 *sont dans la norme.* ». Donc la fréquence observée de tubes dans la norme est

$$f = 954 \div 1000 = 0,954 \text{ soit } f = \underline{0,954}$$

- **Intervalle de confiance** :
  On a pour le cas étudié, $n = 1\,000$, $f = 0,954$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 1000 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 1000 \times \dfrac{954}{1000} = 954 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 1000 \times \dfrac{46}{1000} = 46 \geq 5 \end{cases}$$

  Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{954}{1000} - \frac{1}{\sqrt{1000}}\,;\,\frac{954}{1000} + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right]$$

  Soit puisque les borne sont :

- $f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{954}{1000}-\dfrac{1}{\sqrt{1000}}\approx 0{,}92238$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}922}$.
- $f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{954}{1000}+\dfrac{1}{\sqrt{1000}}\approx 0{,}98562$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}986}$.

$$\boxed{I_{1000}\approx\left[0{,}922\ ;\ 0{,}986\right]}$$

Question 4 (Réponse d)

Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est de $0,8$. Les tirs sont supposés indépendants. Quelle est la probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs ?

a. 0,512 **b.** 2,4 **c.** 0,262 144 $\boxed{\textbf{d. } 0{,}081\,92}$

Preuve.

Modélisation
Il y a répétition de $n=6$ événements indépendants et identiques (on tire une flèche).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p=0.8$ quand une flèche atteint la cible ;
- et échec de probabilité $1-p=0{,}2$ sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n=6$ épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $p=0.8$ suit une loi binomiale de paramètres $\underline{n=6}$ et $\underline{p=0.8}$.
On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathscr{B}\big(6\,;\,0.8\big) \text{ ou } X\sim\mathscr{B}\big(6\,;\,0.8\big).$$

La probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs se traduit par $p\,(X=3)$ or : Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n=6$ et $p=0.8$ on a :

$$P\,(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{6}{k}\times 0.8^k\times(0{,}2)^{6-k}$$

Et donc

$$p\,(X=3)=\binom{6}{3}\times 0.8^3\times 0{,}2^3$$

Soit :

$$\boxed{p\,(X=3)\approx 0.08192}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomDdP* (6 , 0.8 , 3) ≈ 0,081 92
- *Sur TI82/83+ : Menu Distrib ⇒ binomFdp* (6 , 0.8 , 3) ≈ 0,081 92
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM ⇒ binomialPD* (3 , 6 , 0.8) ≈ 0,081 92

Exercice 2. 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016. Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants. Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 *étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1er septembre et le 30 juin) ;*
- *les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.*

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre $2016+n$, *on a donc* $u_0 = 27500$.

1.

1. a. Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.

Fin juin 2017, on peut estimer qu'il y aura dans cette université 150 de moins que les 27 500 de septembre 2016 soit :

$$27500 - 150 = \underline{27350}$$

1. b. Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.

Á la rentrée de septembre 2017, les effectifs connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède donc les étudiants seront au nombre de :

$$27350 \times 1{,}04 = \underline{28444}$$

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 156$.

- Fin juin 2016 + $n+1$, on peut estimer qu'il y aura dans cette université 150 de moins que les u_n de septembre 2016 + n soit : $u_n - 150$
- Á la rentrée de septembre 2017, les effectifs connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède donc on aura :

$$u_{n+1} = (u_n - 150) \times 1{,}04 = 1{,}04u_n - 150 \times 1{,}04 = \underline{1{,}04u_n - 156}$$

3. Recopier et compléter les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3	Traitement :	n prend la valeur 0
L4		U prend la valeur 27 500
L5		Tant que $U \leqslant \boxed{33000}$ faire
L6		n prend la valeur $\boxed{n+1}$
L7		U prend la valeur $\boxed{1.04U - 156}$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher $\boxed{2016+n}$

4.

4. a. On fait fonctionner cet algorithme pas à pas. Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	27 500	28 444	29 426	30 447	31 509	32 613	33 762 > 33 000
Année	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022

4. b. Donner la valeur affichée en sortie de cet algorithme.
La valeur affichée en sortie de cet algorithme sera donc 2022.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n. Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3900$.

5. a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 27\,500 \\ u_{n+1} & = 1{,}04 \times u_n - 156 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 3900 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 3900 \\
v_{n+1} &= (1{,}04\ u_n - 156) - 3900 \\
v_{n+1} &= 1{,}04 \times u_n - 4056 \\
v_{n+1} &= 1{,}04 \times \left(u_n + \frac{-4056}{1{,}04}\right) \\
v_{n+1} &= 1{,}04 \times (u_n - 3900) \\
v_{n+1} &= 1{,}04 \times v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}04$, et de premier terme $v_0 = 23\,600$ puisque :

$$\begin{aligned}
v_0 &= u_0 - 3900 \\
v_0 &= 27\,500 - 3900 \\
v_0 &= 23\,600
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 23\,600 \\ v_{n+1} & = 1{,}04 \times v_n \end{cases} ; \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

5. b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 23\,600 \times 1{,}04^n + 3\,900$.
La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}04$, et de premier terme $v_0 = 23\,600$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ;\ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ v_n = 23\,600 \times (1{,}04)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 3900$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 3900$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ u_n = 23\,600 \times (1{,}04)^n + 3900}$$

5. c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $q > 11$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

De ce fait, ici $q = 1,04 > 1$ et d'après le théorème 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} 23\,600 \times (1,04)^n = +\infty \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Cela signifie donc que le nombre d'étudiants de cette université dépassera toutes les limites de capacité qu'on pourra se fixer.

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Obligatoire : 5 points

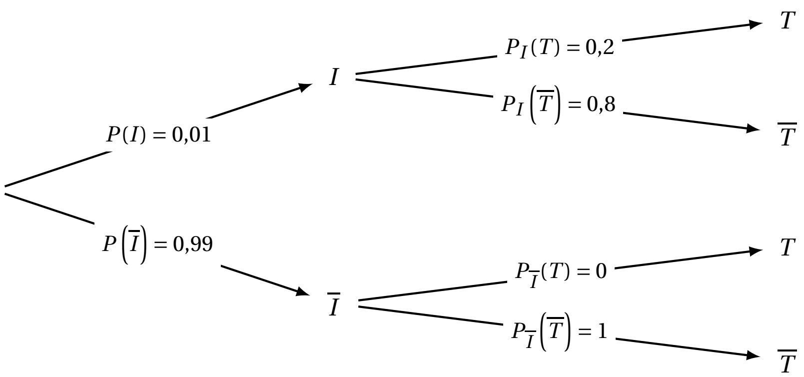
Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

D'après l'AFDIAG (Association Française Des Intolérants au Gluten), la maladie coeliaque, aussi appelée intolérance au gluten, est une des maladies digestives les plus fréquentes. Elle touche environ 1 % de la population. On estime que seulement 20 % des personnes intolérantes au gluten passent le test pour être diagnostiquées. On considère que si une personne n'est pas intolérante au gluten, elle ne passe pas le test pour être diagnostiquée. On choisit au hasard une personne dans la population française qui compte environ 66,6 *millions d'habitants au 1er janvier 2016. On considère les évènements :*

- I : « la personne choisie est intolérante au gluten » ;
- T : « la personne choisie passe le test pour être diagnostiquée ».

PARTIE A

1. **Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :**



2. **Calculer la probabilité que la personne choisie soit intolérante au gluten et ne passe pas le test pour être diagnostiquée.**

La probabilité cherchée est $p\left(I \cap \overline{T}\right)$ soit :

$$p\left(I \cap \overline{T}\right) = p(I) \times p_I\left(\overline{T}\right) = 0,01 \times 0,8 = \underline{0,08}$$

3. **Montrer que $p(T) = 0,002$.**

Les évènement I et $\overline{I}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$p(T) = p(T \cap I) + p\left(T \cap \overline{I}\right)$$
$$p(T) = p(I) \times p_I(T) + p\left(\overline{I}\right) \times p_{\overline{I}}(T)$$
$$p(T) = 0,01 \times 0,2 + 0,99 \times 0$$
$$p(T) = \underline{0,002}$$

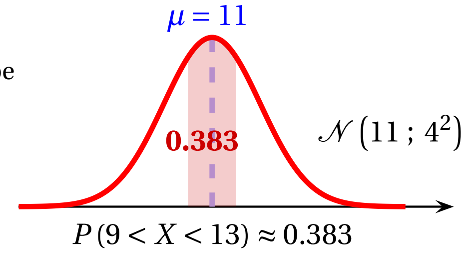
PARTIE B

L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie coeliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes. On note X la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie coeliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.On admet que la loi de X peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Calculer la probabilité que la maladie soit diagnostiquée entre 9 ans et 13 ans après les premiers symptômes. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}\left(11\,;\,4^2\right) \Longrightarrow P(9 < X < 13) \approx \underline{0{,}383}$$



> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(9\,,\,13\,,\,11\,,\,4) \approx \underline{0{,}382\,925}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(9\,,\,13\,,\,11\,,\,4)$ *ou (fr.) normalfrép*$(9\,,\,13\,,\,11\,,\,4)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(9\,,\,13,\,4\,,\,11\,)$

2. Calculer $p(X \leqslant 6)$. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

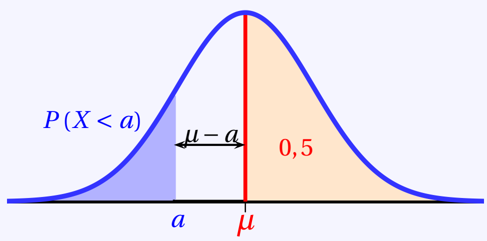
Propriété 1 $(P(X < a)\ ;\ a < \mu)$

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0{,}5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a < \mu$:

$$\boxed{P(X < a) = 0{,}5 - P\left(a < X < \mu\right)}$$



Puisque $6 < \mu = 11$ on a d'après le théorème :

$$p(X \leq 6) = 0{,}5 - p(6 \leq X \leq 11) \approx \underline{0,106}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 :* $\Big(0{,}5-$ *TIStat.normFDR*$(6\,,\,11\,,\,11\,,\,4)\Big) \approx \underline{0{,}105\,650}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(6\,,\,11\,,\,11\,,\,4)$ *ou (fr.) normalfrép*$(6\,,\,11\,,\,11\,,\,4)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(6\,,\,11,\,4\,,\,11\,)$

3. Sachant que $p(X \leqslant a) = 0{,}84$, donner la valeur de a arrondie à l'unité. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On cherche a tel que $P(X \leq a) = 0{,}84$ où X qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(11\,;\,4^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-0} près :

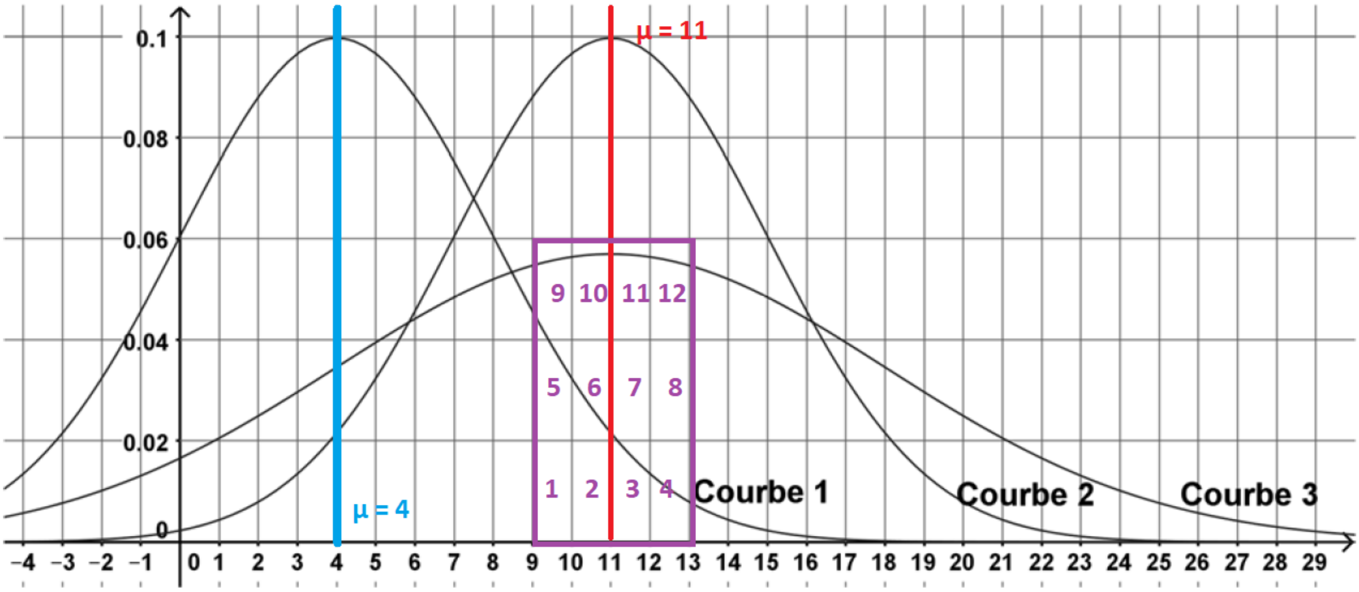
$$\boxed{P(X \leq a) = 0{,}84 \Longleftrightarrow a \approx \underline{15}}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0.84\,,\,11\,,\,4) \approx \underline{14{,}98}$
> - *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0.84\,,\,11\,,\,4)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0.84\,,\,11\,,\,4)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0.84\,,\,4\,,\,11)$

Cela signifie donc que 84% des personnes atteintes de la maladie coeliaque ont attendu au plus 15 pour être diagnostiqué après l'apparition des premiers symptômes.

 ©ISSN 2272-5318

4. Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$? Justifier le choix. On pourra s'aider des réponses aux questions précédentes.

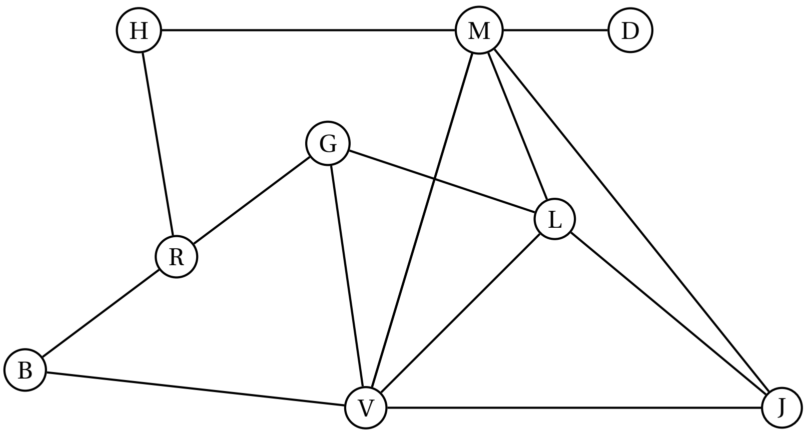


- Puisque $\mu = 11$, cela exclut la courbe 1 qui a visiblement pour axe de symétrie une droite d'équation $x \approx 4$.
- D'après la question (B.1.) on a : $P(9 < X < 13) \approx 0,383$.
  Sur le graphique, l'unité d'aire est un rectangle d' aire 0,02 u.a. L'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe 3 et les droites d'équation $x = 9$ et $x = 13$ est inférieure à $4 \times 3 = 12$ rectangles soit $12 \times 0,02 = 0,24 < 0,383$. Cela exclut donc la courbe 3.
- La courbe 2 représente donc la fonction de densité de cette loi normale.

Exercice 3 . Spécialité : 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés. Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes :



B : Le lagon bleu.	H : Rocher Hvitserkur.	M : Lac de Myvatn.
D : Chute d'eau de Dettifoss.	J : Lagune glacière de Jôkulsarlôn.	R : Capitale Reykjavik.
G : Geyser de Geysir.	L : Massif du Landmannalaugar.	V : Ville de Vik.

1. *Dans cette question, chaque réponse sera justifiée.*

1. a. Déterminer l'ordre du graphe.

Le nombre de sommets est l'ordre du graphe. Le graphe est ici composé de 9 sommets, donc l'ordre du graphe est 9.

1. b. Déterminer si le graphe est connexe.

Définition 1 (Graphe connexe)

Un graphe est dit **connexe** si on peut relier n'importe quelle paire de sommets par une chaîne.

Dans le graphe proposé, il existe une chaîne entre chacun des sommets puisque par exemple la chaîne $B-R-H-M-D-M-L-G-V-J$ contient tous les sommets de ce graphe non orienté, de ce fait le graphe est connexe.

1. c. Déterminer si le graphe est complet.

Définition 2 (Graphe complet)

- Un *graphe simple* est un graphe sans boucle dont chaque couple de sommets est relié par au plus une arête.
- Un graphe simple est dit *complet* si tous les sommets sont adjacents, c'est-à-dire s'il existe toujours une (et une seule) arête entre deux sommets disjoints.

Bien que simple, le graphe n'est pas complet car par exemple les sommets D et J ne sont pas reliés par une arête.

2. Sarah désire emprunter toutes les routes une et une seule fois. Déterminer, en justifiant, si cela est possible.

Emprunter toutes les routes une et une seule fois c'est chercher une chaîne eulérienne. Citons le théorème d'Euler :

Théorème 2 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse [Leonhard d'Euler](#) (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

On a vu lors de la question (1.b.) que ce graphe était connexe. Les degré de chaque sommet sont :

Sommet	B	D	G	H	J	L	M	R	V
Degré	2	1	3	2	3	4	4	3	4

Le graphe possède 4 sommets de degré impair (D; G; J et R) donc d'après le théorème d'Euler-Hierholzer, ce graphe connexe n'admet pas de chaîne eulérienne. Sarah ne peut pas emprunter toutes les routes une et une seule fois.

3. On appelle M la matrice associée au graphe précédent sachant que les sommets sont placés dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous une partie de la matrice M ainsi que la matrice M^4 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 16 & 8 & 14 & 13 & 15 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 5 & 6 & 9 & 11 & 6 & 3 & 12 \\ 16 & 5 & 24 & 11 & 23 & 21 & 26 & 5 & 20 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 14 & 9 & 23 & 13 & 28 & 29 & 29 & 8 & 30 \\ 13 & 11 & 21 & 14 & 29 & 38 & 32 & 15 & 40 \\ 15 & 6 & 26 & 9 & 29 & 32 & 43 & 14 & 34 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & 15 & 14 & 15 & 21 \\ 10 & 12 & 20 & 14 & 30 & 40 & 34 & 21 & 49 \end{pmatrix}$$

3. a. Il manque certains coefficients de M. Compléter et recopier uniquement la partie manquante de cette matrice.

La partie manquante correspond au nombre d'arêtes reliant les sommets M, R et V aux sommets B, D et G :

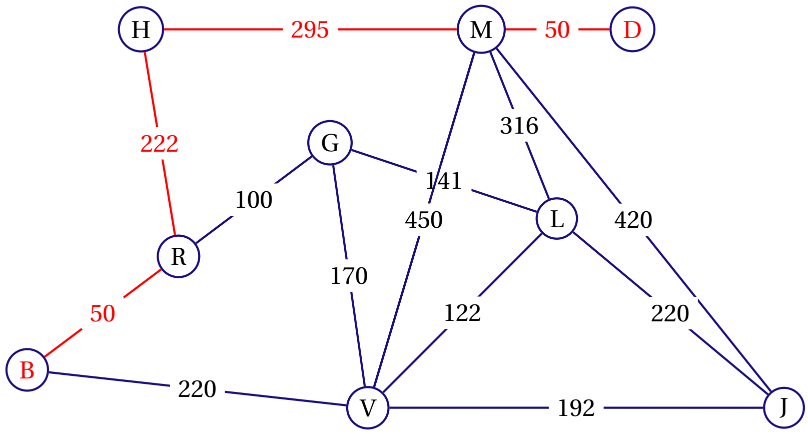
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. b. Donner, en le justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D.

Le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D est donnée par le coefficient (1 , 2) de la matrice M. or on a $M^4_{(1,2)} = 3$ on a donc 3 chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D . Il s'agit des chemins :

$$B-R-H-M-D\,;\; B-V-L-M-D \text{ et } B-V-J-M-D$$

4. *Sur le graphe pondéré ci-dessous, on a indiqué sur les arêtes les distances en kilomètre entre les différents lieux :*



Déterminer à l'aide de l'algorithme de Dijkstra la distance minimale permettant d'aller du sommet B (Lagon bleu) au sommet D (Chute d'eau de Dettifoss). Préciser alors le trajet à emprunter.
Pour déterminer le trajet le plus rapide pour aller de B à D, on utilise l'algorithme de Dijkstra.
Remarque : L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.

de ... à	G	H	J	L	M	R	V	D
B	∞	∞	∞	∞	∞	**50B**	220B	∞
$R(50B)$	**150R**	272R	∞	∞	∞		220B	∞
$G(150R)$		272R	∞	291G	∞		**220B**	∞
$V(220B)$		**272R**	412V	291G	670V			∞
$H(272R)$			412V	**291G**	567H			∞
$L(291G)$			**412V**		567H			∞
$J(412V)$					**567H**			∞
$M(567H)$								**617M**

Le chemin le plus court pour relier B à D est donc de longueur 617 km :

$$\boxed{B \xrightarrow{50} R \xrightarrow{222} H \xrightarrow{295} M \xrightarrow{50} D}$$

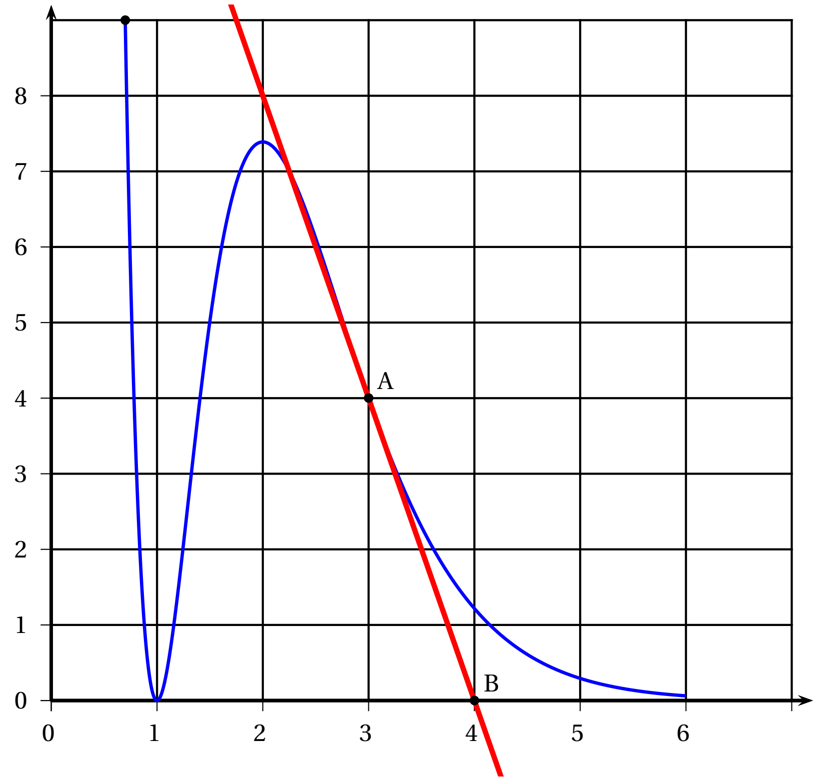
Exercice 4. 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Soit f une fonction définie sur l'intervalle [0,7 ; 6] ; on suppose que f est dérivable.

PARTIE A : Étude graphique

On a représenté la fonction f sur le graphique ci-dessous.



1. **La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A(3 ; 4) et B(4 ; 0). Déterminer $f'(3)$.**
   Le nombre dérivé $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f. Cette tangente passe par les points A(3 ; 4) et B(4 ; 0) donc on a :

$$f'(3) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-4}{4-3} = -4 \Longrightarrow \boxed{f'(3) = -4}$$

2. **D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de f' sur l'intervalle [0,7 ; 6]** .
   D'après les variation de la fonction f que l'on conjecture d'après le graphique on a :

x	0.7		1		2		6
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	≈ 9	$\searrow$	0	$\nearrow$	≈ 7.4	$\searrow$	≈ 0

PARTIE B : Étude théorique

On admet que la fonction f est définie par :

$$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) \mathrm{e}^{-2x+6}.$$

1. Montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right) \mathrm{e}^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,7\,;\,6[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) \times \mathrm{e}^{-2x+6} \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $]0,7\,;\,6[$.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in]0,7\,;\,6[\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x) \ : \ \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) & ; & u'(x) = (2x - 2) \\ v(x) = \mathrm{e}^{-2x+6} & ; & v'(x) = (-2) \times \mathrm{e}^{-2x+6} \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0,7\,;\,6[,\ \ f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= (2x - 2) \times \mathrm{e}^{-2x+6} + \left(x^2 - 2x + 1\right) \times (-2) \times \mathrm{e}^{-2x+6} \\ f'(x) &= \left(2x - 2 - 2x^2 + 4x - 2\right) \times \mathrm{e}^{-2x+6} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in]0,7\,;\,6[\ ;\ f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right) \mathrm{e}^{-2x+6}}$$

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0,7 ;6] et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0,7 ; 6]. On ne demande pas de calculer les ordonnées.

La dérivée f' s'exprime sous la forme d'un produit de deux facteurs, dont e^{-2x+6} qui est strictement positif sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori sur $[0,7\,;\,6]$. La dérivée est donc du signe du facteur du second degré $\left(-2x^2 + 6x - 4\right)$.

L'expression $\left(-2x^2 + 6x - 4\right)$ est une expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 6 \\ c = -4 \end{array} \right| \Longrightarrow \Delta = 4 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-2x^2 + 6x - 4\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{4}}{-4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{4}}{-4} = 1$$

Le facteur $\left(-2x^2 + 6x - 4\right)$ est est signe de $a = -2$ soit négatif à l'extérieur des racines, et positif ailleurs. On obtient donc :

x	0.7		1		2		6
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	≈ 9	$\searrow$	0	$\nearrow$	≈ 7.4	$\searrow$	≈ 0

3. *À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés.*

L1	$f'(x) := (-2x\hat{}2+6x-4)*\mathrm{e}\hat{}(-2x+6)$ $\rightarrow f'(x) = \left(-2x^2+6x-4\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$
L2	$g(x) :=$ Dérivée$[f'(x)]$ $\rightarrow g(x) = -16x\mathrm{e}^{-2x+6}+4x^2\mathrm{e}^{-2x+6}+14\mathrm{e}^{-2x+6}$
L3	Factoriser$[g(x)]$ $\rightarrow 2\mathrm{e}^{-2x+6}\left(2x^2-8x+7\right)$
L4	Résoudre$[g(x)=0]$ $\rightarrow \left\{x=\dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}\ ;\ x=\dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L5	$F(x) :=$ Primitive$[f(x)]$ $\rightarrow F(x)=\dfrac{1}{4}\left(-2x^2+2x-1\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$

3. a. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est *convexe* si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles .
f est *concave* si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles .

D'après le logiciel de calcul formel on a pour tout réel x de $[0,7\,;\,6]$:

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{-2x+6}\left(2x^2-8x+7\right)$$

On sait que f est *concave* si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles donc il nous faut étudier le signe de la dérivée seconde.
La dérivée seconde f'' s'exprime sous la forme d'un produit de deux facteurs, dont e^{-2x+6} qui est strictement positif sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori sur $[0,7\,;\,6]$. La dérivée est donc du signe du facteur du second degré $\left(2x^2-8x+7\right)$. Le facteur $\left(2x^2-8x+7\right)$ est est signe de $a=2$ soit positif à l'extérieur des racines (dont on a l'expression en ligne L4) et négatif entre . On vérifie que les racines appartiennent à l'intervalle de définition :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-\sqrt{2}+4}{2} \approx 1,293 \in [0,7\,;\,6] \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{2}+4}{2} \approx 2,707 \in [0,7\,;\,6] \end{cases}$$

La fonction f est donc concave sur l'intervalle $\left[\dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\right]$.

3. b. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion? Si oui, en donner l'abscisse.

La courbe représentative de la fonction f admet des points d'inflexion si $f''(x)$ change de signe en s'annulant. D'après l'étude menée lors de la question (3.a.), la fonction f possède deux points d'inflexion dont les abscisses sont $x_1 = \dfrac{-\sqrt{2}+4}{2} \approx 1,293$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}+4}{2} \approx 2,707$.

3. c. On pose $I = \displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1}.

La ligne L5 nous donne une primitive F de f qui est pour tout x de $[0,7\,;\,6]$: $F(x) = \dfrac{1}{4}\left(-2x^2+2x-1\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$. On a donc :

$$I = \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = F(5)-F(3)$$

$$I = \frac{1}{4}(-50+10-1)\,\mathrm{e}^{-4} - \frac{1}{4}(-18+6-1)\,\mathrm{e}^{0}$$

$$\boxed{I = \frac{-41\,\mathrm{e}^{-4}+13}{4} \approx 3,1}$$

Fin du devoir