Math93.com

Baccalauréat 2017 - ES/L
Antilles Guyane

Série ES/L Obli. et Spé.
16 Juin 2017
Correction

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. QCM — 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Question 1 (Réponse c)

A et B sont deux évènements d'une expérience aléatoire.On note B l'évènement contraire de B. On sait que : $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,42$. On peut affirmer que :

a. $p_A(B) = 0,3$ **b.** $p(A \cup B) = 0,58$ $\boxed{\textbf{c. } p_B(A) = 0,84}$ **d.** $p\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,28$

Preuve.

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,42}{0,5} = 0,84$$

Question 2 (Réponse b)

Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 5]$.

a. L'espérance de X est $\frac{2}{5}$ $\boxed{\textbf{b. } p(X > 2) = \frac{3}{5}}$ **c.** $p(X \leq 2) = \frac{3}{5}$ **d.** $p(X \leq 5) = 0$

Preuve.

Propriété 1

Soit X la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$. Pour tout c et d de l'intervalle $[a; b]$ avec $c < d$ on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a} \qquad \text{et} \qquad E(X) = \frac{b+a}{2}$$

Donc ici puisque X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 5]$ on a :

$$p(X > 2) = p(2 < X \leq 5) = \frac{5-2}{5-0} = \frac{3}{5}$$

Question 3 (Réponse c)

Une machine remplit des flacons dont le volume annoncé est de 100 mL. On admet que le volume contenu dans le flacon peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 100mL et d'écart type 2mL.

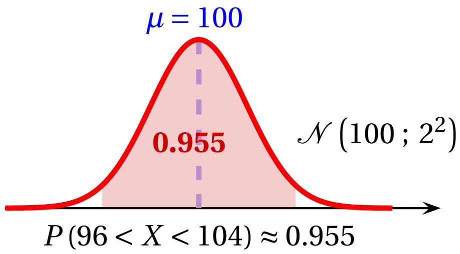
a. $p(Y \leq 100) = 0,45$ **b.** $p(Y > 98) = 0,75$ $\boxed{\textbf{c. } p(96 \leq Y \leq 104) \approx 0,95}$ **d.** $p(Y \leq 110) \approx 0,85$

Preuve.

- Méthode 1.

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 2$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}\left(100\,;\,2^2\right) \Longrightarrow P(96 < X < 104) \approx \underline{0,955}$$



Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*(96 , 104 , 100 , 2) ≈ $\underline{0,954\,50}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*(96 , 104 , 100 , 2) *ou (fr.) normalfrép*(96 , 104 , 100 , 2)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* ⇒ *NormCD*(96 , 104, 2 , 100)

- Méthode 2 : on pouvait aussi appliquer le théorème dit « $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ » puisque

$$p(96 \leq Y \leq 104) = p(100 - 2\sigma \leq Y \leq 100 + 2\sigma) \approx 0,954$$

Propriété 2 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$\begin{aligned}
P\left(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\right) &\approx 0,683 \quad : (1)\\
P\left(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\right) &\approx 0,954 \quad : (2)\\
P\left(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\right) &\approx 0,997 \quad : (3)
\end{aligned}$$

Question 4 (Réponse d)

Un article affirme, qu'en France, il y a 16% de gauchers. Un chercheur souhaite vérifier cette affirmation. Pour cela, il veut déterminer la taille de l'échantillon de la population française à étudier qui permettrait d'obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,1 au niveau de confiance de 0,95. La taille de l'échantillon est :

a. 30 **b.** 64 **c.** 100 $\boxed{\textbf{d.}\ 400}$

Preuve.
Si f représente la fréquence du caractère étudié dans un échantillon de taille n, alors si les condition sont vérifiées , l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %, est donné par :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Donc son amplitude est : $A = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$. On cherche donc un entier n strictement positif tel que $\dfrac{2}{\sqrt{n} =} \leq 0,01$. En composant par la fonction inverse strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient :

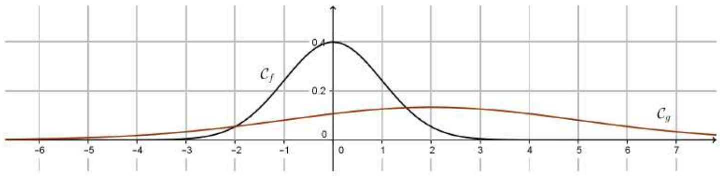
$$\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,01 \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{1}{0,1} \Longleftrightarrow \sqrt{n} = \frac{2}{0,1} = 20$$

Et puisque n est positif, on obtient en composant par la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+^*$: $\underline{n = 400}$.

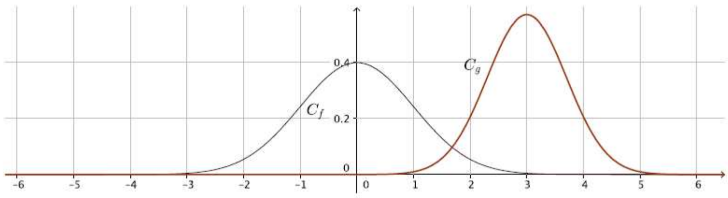
Question 5 (Réponse d)

La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite $N(0\,;\,1)$. La fonction g est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 2$. La représentation graphique de ces deux fonctions est :

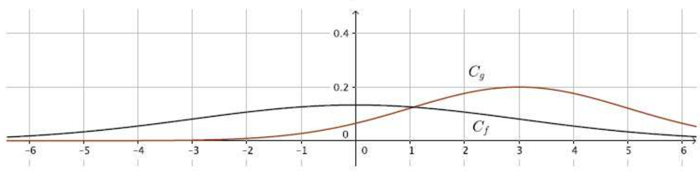
a.



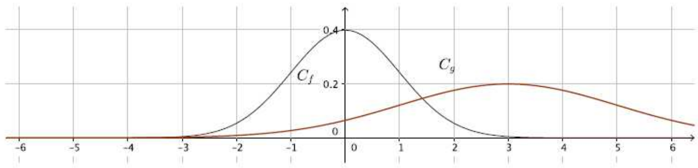
b.



c.



d.



Preuve.

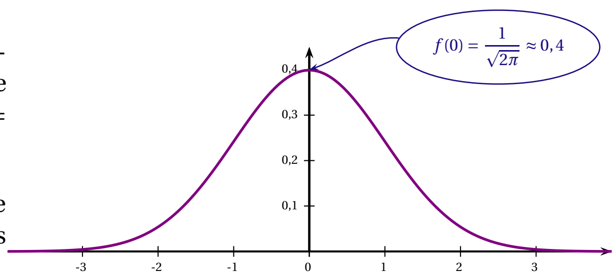
- $\mu = 3$ donc l'axe de symétrie de la courbe $_{C}c_g$ doit être la droite d'équation $x = 3$. On exclut la figure a.
- Puisque $\sigma = 2$ on a toujours avec le théorème 2 ou avec la calculatrice :

$$p\left(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\right) = p\,(1 < X < 5) \approx 0,68$$

  Cela exclut la figure b car visiblement l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_g$ entre 1 et 5 est supérieure à 4 carreaux soit 0,8.
- Les deux dernières courbes $\mathscr{C}_g$ sont identiques, il faut considérer $\mathscr{C}_f$. Par définition :

Définition 1

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0;1)$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, la courbe représentative de la densité f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



On doit donc avoir $f(0) \approx 0,4$ ce qui exclut la courbe $\mathscr{C}_f$ de la figure c.

- Conclusion : le figure correcte est la d.

Exercice 2. Obligatoire — 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Un particulier possède une piscine et décide de s'équiper d'un système automatique de remplissage pour tenir compte de l'évaporation pendant la période estivale. Sur un site spécialisé, il apprend que les conditions climatiques dans sa région pendant cette période sont telles qu'il peut prévoir une évaporation quotidienne de 4 % de la quantité d'eau. Il décide alors de régler son système de remplissage automatique à un apport de 2 m^3 d'eau par jour. Le premier jour de la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage, la piscine contient 75 m^3. Pour tout entier naturel n, on note u_n le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), n jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage. Ainsi, $u_0 = 75$.

1. Calculer u_1 et u_2.

- u_1 est le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), 1 jour après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.
  On le calcule en effectuant une baisse de 4% du volume $u_0 = 75\ \text{m}^3$ initial (à cause de l'évaporation) et en ajoutant 2 m^3. Effectuer une baisse de 4% c'est multiplier par $(1-4\%) = 0,96$ donc $u_1 = 0,96 \times 75 + 2 = \underline{74\ \text{m}^3}$.
- u_2 est le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), 2 jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.
  On le calcule en effectuant une baisse de 4% du volume $u_1 = 74\ \text{m}^3$ précédent (à cause de l'évaporation) et en ajoutant 2 m^3, donc $u_2 = 0,96 \times u_2 + 2 = \underline{73.04\ \text{m}^3}$.

2. Justifier que la suite (u_n) n'est pas arithmétique. Est-elle géométrique ?

- On : $\begin{cases} u_1 - u_0 = 1 \\ u_2 - u_1 = 0,96 \neq 1 \end{cases}$ donc la suite n'est pas arithmétique .
- On : $\begin{cases} \dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{74}{75} \approx 0,98667 \\ \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{73.04}{74} \approx 0,98703 \end{cases}$ donc les rapports sont différents, la suite n'est pas géométrique .

3. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,96 \times u_n + 2$.

Pour tout entier n, u_{n+1} est le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), $(n+1)$ jour après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.
On le calcule en effectuant une baisse de 4% du volume u_n précédent (à cause de l'évaporation) et en ajoutant 2 m^3. Effectuer une baisse de 4% c'est multiplier par $(1-4\%) = 0,96$ donc $\underline{u_{n+1} = 0,96 \times u_n + 2}$.

4. *Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 50$.*

4. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme v_0.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 75 \\ u_{n+1} & = 0,96 \times u_n + 2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 50 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 50 \\ v_{n+1} &= (0,96\ u_n + 2) - 50 \\ v_{n+1} &= 0,96 \times u_n - 48 \\ v_{n+1} &= 0,96 \times \left(u_n + \frac{-48}{0,96}\right) \\ v_{n+1} &= 0,96 \times (u_n - 50) \\ v_{n+1} &= 0,96 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une $\underline{\text{suite géométrique}}$ de raison $q = 0,96$, et de premier terme $v_0 = 25$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 50 \\ v_0 &= 75 - 50 \\ v_0 &= 25 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 25 \\ v_{n+1} & = 0{,}96 \times v_n \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

4. b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}96$, et de premier terme $v_0 = 25$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; \; v_n = 25 \times (0{,}96)^n}$$

4. c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 25 \times 0{,}96^n + 50$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 50$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 50$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; \; u_n = 25 \times (0{,}96)^n + 50}$$

4. d. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

> **Théorème 1**
>
> Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0{,}96 < 1$ et d'après le théorème 1 on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}98)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} 25 \times (0{,}98)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} 25 \times (0{,}98)^n + 50 = 50$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 50}$$

Sur le long terme la piscine contiendra 50 m^3 d'eau.

5. *Si le volume d'eau dans la piscine est inférieur à 65 m^3, le niveau de l'eau est insuffisant pour alimenter les pompes de filtration ce qui risque de les endommager. Pour connaître le nombre de jours pendant lesquels le niveau d'eau reste suffisant sans risquer de panne en conservant ce réglage, on construit l'algorithme suivant :*

Variables :	n est un nombre entier naturel	L1
	u est un nombre réel	L2
Traitement :	n prend la valeur 0	L3
	u prend la valeur 75	L4
	Tant que u $\boxed{u \geq 65}$	L5
	u prend la valeur $\boxed{0.96 \times u + 2}$	L6
	n prend la valeur $n + 1$	L7
	Fin Tant que	L8
Sortie :	Afficher n	L9

5. a. Recopier et compléter les lignes L5 et L6 de cet algorithme.

5. b. Quel est le résultat affiché en sortie de cet algorithme ?

n	0	1	2	3	...	7	8	9	10	11	12	**13**	14
u_n	75	74	73.040	72.118	...	68.786	68.035	67.313	66.621	65.956	65.318	64.705 < 65	64.117

Le résultat affiché en sortie de cet algorithme est donc $n = 13$.

5. c. Pendant combien de jours le niveau de l'eau est-il suffisant si on conserve ce réglage ?

Le niveau d'eau est suffisant si on conserve ce réglage pendant 13 jours. En effet le premier jour, la piscine contient $u_0 = 75$ m^2, et après 13 jours le niveau passe sous les 65 m^3, d'après le résultat précédent.
Donc après 12 jours soit pendant 13 jours le niveau d'eau est acceptable puisque tous les termes u_0, u_1,... , u_{12} sont supérieurs à 65.

n	0	1	2	3	...	12	**13**	14
u_n	75	74	73.040	72.118	...	65.318	64.705 < 65	64.117
	1er jour	après 1 jour	après 2 jours	après 3 jours	...	après 12 jours	après 13 jours	
Nombre de jours	1	2	3	4		13	14	

Remarque

On pouvait chercher la valeur de sortie de l'algorithme en résolvant une inéquation.
On cherche le plus petit entier n tel que $u_n < 65$ soit :

$$\begin{aligned} u_n < 65 &\Longleftrightarrow 25 \times 0,96^n + 50 < 65 \\ &\Longleftrightarrow 25 \times 0,96^n < 15 \\ &\Longleftrightarrow 0,96^n < \frac{15}{25} \\ &\Longleftrightarrow 0,96^n < 0,6 \end{aligned}$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\Longleftrightarrow n \ln(0,96) < \ln(0,6)$$

On divise les deux membres par $\ln 0,96 < 0$, l'ordre change :

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow n > \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,96)} \approx 12,51 \\ &\Longleftrightarrow n \geq 13 \quad \text{car } n \text{ entier} \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat précédent, tous les termes u_0, u_1, ... , u_{12} sont supérieurs à 65. Le niveau d'eau est suffisant durant 13 jours.

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Spécialité — 5 points

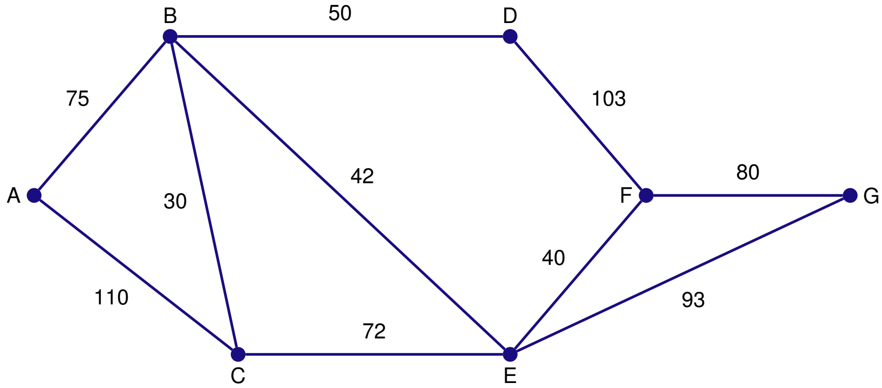
Commun à tous les candidats

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Le graphe ci-dessous représente le plan d'un centre de vacances. Les arêtes représentent les allées et les sommets, les carrefours. On a indiqué sur chaque arête la longueur en mètre des allées entre deux carrefours.



1. Le service d'entretien doit nettoyer toutes les allées. En partant du carrefour C, peut-on nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles ? Justifier la réponse.
Le problème posé revient à déterminer si le graphe contient un chaîne eulérienne.

- Graphe Connexe

Définition 2 (Graphe connexe)

Un graphe est dit **connexe** si on peut relier n'importe quelle paire de sommets par une chaîne.

Dans le graphe proposé, il existe une chaîne contenant tous les sommets du graphe, la chaîne : $A-C-B-E-G-F-D$ donc le graphe est connexe.

- Application du Théorème.
Une chaîne eulérienne est une chaîne satisfaisant aux conditions suivantes : elle contient toutes les arêtes du graphe et chaque arête n'est décrite qu'une seule fois. De ce fait on cherche ici l'existence d'une telle chaîne.

Théorème 2 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

– Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
– Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	2	4	3	2	4	3	2

Donc seuls deux sommets sont de degré impair , les sommets C et F. Par conséquent, d'après le théorème d'Euler-Hierholzer, ce graphe connexe admet une chaine eulérienne.
Il existe un trajet, en partant du carrefour C, permettant de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles .

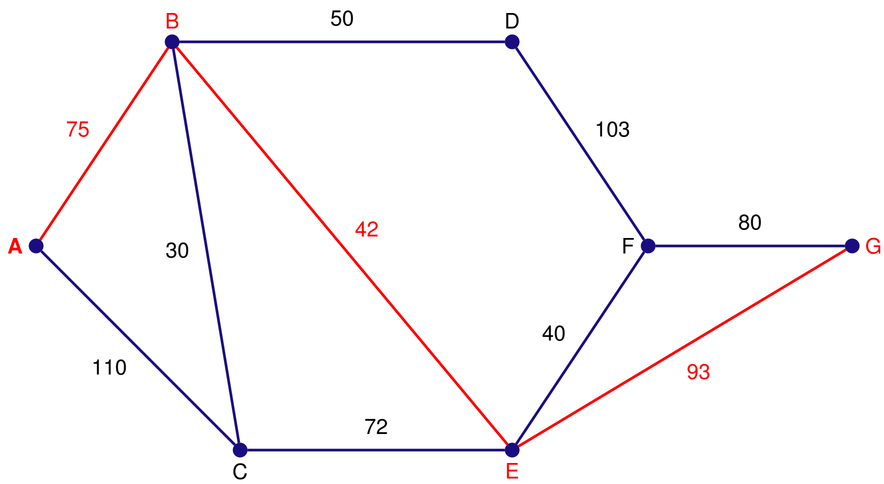
2. Existe-t-il un parcours permettant de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles et de revenir au point de départ? Justifier la réponse.
Un tel trajet correspond à un cycle eulérien. Or tous les sommets ne sont pas de degré pair, donc d'après le théorème d'Euler-Hierholzer, ce graphe connexe n'admet pas de cycle eulérien. Il n'existe pas un parcours permettant de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles et de revenir au point de départ.

3. Déterminer le trajet le plus court pour aller du carrefour A au carrefour G. Pour déterminer le trajet le plus rapide pour aller de A à G, on utilise l'algorithme de Dijkstra.
Remarque : L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.

de ... à	B	C	D	E	F	G
A	**75A**	110A	∞	∞	∞	∞
B75		**105B**	125B	117B	∞	∞
C105			125B	**117B**	∞	∞
E117			**125B**		157E	210E
D125					**157E**	210E
F157						**210E**

Le chemin le plus court pour relier A à G est donc de longueur 210 mètres :

$$\boxed{A \xrightarrow{75} B \xrightarrow{42} E \xrightarrow{93} G}$$



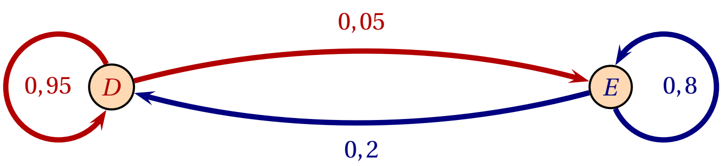
Partie B

Dans ce centre de vacances, les vacanciers peuvent, chaque jour, déjeuner au restaurant du centre ou à l'extérieur. On constate chaque jour que :

- *5 % des vacanciers ayant déjeuné au centre de vacances ne se réinscrivent pas pour le lendemain ;*
- *20 % des vacanciers ayant déjeuné à l'extérieur s'inscrivent pour déjeuner au centre de vacances le lendemain.*

On note D l'état « Déjeuner au centre de vacances » et E l'évènement « Déjeuner à l'extérieur ».

1. Construire un graphe modélisant cette situation.



2. Écrire la matrice de transition de ce graphe, les sommets étant rangés selon l'ordre alphabétique.

La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1ère ligne : probabilité d'aller de D vers D, de D vers E ;
- 2ème ligne : probabilité d'aller de E vers D, de E vers E.

On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}}$$

3. Le premier jour, le quart des vacanciers a déjeuné au centre de vacances. Quel pourcentage de vacanciers déjeunera au centre de vacances le deuxième jour ? Le cinquième jour ?

- Modélisation.
  Notons pour n entier supérieur ou égal à 1, respectivement d_n et e_n la proportion de vacanciers ayant déjeuner au centre et à l'extérieur le n^e jour.
  En notant P_n l'état probabiliste le n^e jour défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} d_n & e_n \end{pmatrix}$ on a pour tout entier $n \geq 1$

$$\left\{\begin{array}{l} P_1 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \\ P_{n+1} = P_n \times M \end{array}\right. \quad \Bigg| \implies P_n = P_1 \times M^{n-1}$$

- Le deuxième jour.
  On a

$$\begin{aligned} P_2 &= \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \times M^1 \\ \begin{pmatrix} d_2 & e_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,95 + 0,75 \times 0,2 & 0,25 \times 0.05 + 0.75 \times 0.8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_2 & e_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,3875 & 0.6125 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Donc 38,75% des vacanciers déjeuneront au centre de vacances le deuxième jour.

- Le cinquième jour.
  On a en calculant M^4 avec la calculatrice :

$$\begin{aligned}
P_5 &= \begin{pmatrix}0,25 & 0,75\end{pmatrix} \times M^4 \\
\begin{pmatrix}d_5 & e_5\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0,25 & 0,75\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}^4 \\
&\approx \begin{pmatrix}0,25 & 0,75\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0.86328 & 0.13672 \\ 0.54688 & 0.45313\end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix}0.62598 & 0.37402\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  Donc environ 62,6% des vacanciers déjeuneront au centre de vacances le cinquième jour.

4. L'état $\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix}$ est-il stable ?

Propriété 3 (État stable)

L' *état stable* dans un système a deux états , de matrice de transition M, est la matrice $P = \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ telle que :

$$\begin{cases} P = P \times M \\ a + b = 1 \end{cases}$$

- La somme des termes de la matrice ligne P vaut 1.
- Par ailleurs :

$$P \times M = \begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,575 & 0,425\end{pmatrix} \neq P$$

Donc l'état $\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix}$ n'est pas stable.

5. Peut-on affirmer qu'à terme, si les comportements des vacanciers restent les mêmes, 75 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre ?

- **Méthode 1**.
  Vérifions si l'état $P' = \begin{pmatrix}0,75 & 0,25\end{pmatrix}$ est stable.
  - La somme des termes de la matrice ligne P vaut 1.
  - Par ailleurs :

$$P' \times M = \begin{pmatrix}0,75 & 0,25\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,7625 & 0,2375\end{pmatrix} \neq P$$

  Donc l'état $P' = \begin{pmatrix}0,75 & 0,25\end{pmatrix}$ n'est pas stable. Or on sait que

Propriété 4 (État stable)

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.
Cet état stable vérifie l'égalité :

$$P = P \times M$$

Puisque la matrice M ne comporte pas de zéro, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_1. Cet état stable vérifie l'égalité : $P = P \times M$.
Donc si à terme, 75 % des vacanciers prenaient leur déjeuner au centre, l'état P' serait l'état vers lequel convergerait P_n et il serait stable, ce qui n'est pas le cas.
Conclusion : on ne peut pas affirmer qu'à terme, si les comportements des vacanciers restent les mêmes, 75 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre.

- **Méthode 2** : On détermine l'état stable.
  On note $P'' = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état stable de la répartition des abonnés. Alors par définition on a :

$$\begin{cases} P'' = P'' \times M \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95x + 0,2y & 0,05x + 0,8y \end{pmatrix} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0,95x + 0,2y \\ y = 0,05x + 0,8y \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,05x - 0,2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,05x - 0,2(1-x) = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,25x - 0,2 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{0,2}{0,25} = 0,8 \\ y = 0,2 \end{cases}$$

Donc l'état stable du système est $P'' = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Propriété 5 (État stable)

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.
Cet état stable vérifie l'égalité :

$$P = P \times M$$

Puisque la matrice M ne comporte pas de zéro, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_1.
Cet état stable nous l'avons prouvé est $P'' = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ et donc à terme, 80% des des vacanciers prendront leur déjeuner au centre.
L'affirmation proposée était donc fausse.

Exercice 3. 7 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,10]$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses. Le domaine S grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 2$ et la droite d'équation $x = 4$.

Partie A

1. **Déterminer, en la justifiant, la valeur de $f'(-2)$.**
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses donc le nombre dérivée $f'(-2)$, coefficient directeur de cette tangente, est nul.

2. **Par une lecture graphique, quel semble être le signe de $f'(4)$?**
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4 est "dirigée vers le bas" donc le nombre dérivée $f'(4)$, coefficient directeur de cette tangente, est négatif.

3. **Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine S grisé sur la figure.**
   L'aire du domaine S est comprise entre 3 et 4 unités d'aires.

Partie B

La fonction f précédente est définie sur l'intervalle $[-4\,;\,10]$ par $f(x) = (x+4)\ e^{-0,5x}$.

1.

1. a. Montrer que $f'(x) = (-0,5x - 1)\ \mathrm{e}^{-0,5x}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [-4\,;\,10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = (x+4) \times \mathrm{e}^{-0,5x} \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $[-4\,;\,10]$.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [-4\,;\,10]\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x)\ \ :\ \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = (x+4) & ; & u'(x) = 1 \\ & & \\ v(x) = \mathrm{e}^{-0,5x} & ; & v'(x) = \left(-0,5\ \mathrm{e}^{-0,5x}\right) \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-4\,;\,10]\,,\ \ f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-0,5x} + (x+4) \times \left(-0,5\ \mathrm{e}^{-0,5x}\right) \\ f'(x) &= (1 - 0,5x - 2) \times \mathrm{e}^{-0,5x} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [-4\,;\,10]\ ;\ f'(x) = (-0,5x - 1)\ \mathrm{e}^{-0,5x}}$$

1. b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;\,10]$.
La fonction dérivée f' s'exprime comme produit de deux facteurs. Le facteur $\mathrm{e}^{-0,5x}$ est strictement positif sur $[-4\,;\,10]$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. De ce fait, f' est du signe du facteur $(-0,5x - 1)$ dont l'étude du signe est aisé.

$$\left\{ \begin{array}{l} -0,5x - 1 = 0 \iff x = -2 \\ -0,5x - 1 < 0 \iff x > -2 \end{array} \right.$$

x	-4		-2		1	α	6		10
Signe de $f'(x)$		$+$	0			$-$			
Variations de f	0	$\nearrow$	$20\,\mathrm{e}^{1} \approx 5.43$	$\searrow$	$\approx 3,03$	1.5	$\approx 0,5$	$\searrow$	$60\,\mathrm{e}^{-3} \approx 0.1$

1. c. Montrer que sur l'intervalle [1 ; 6] l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution. On notera α cette unique solution.

Théorème 3 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

1. d. Application du corollaire sur $[1;6]$:

- La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[1;6]$;
- Le réel $k = 1.5$ est compris entre $f(1) \approx 3$ et $f(6) \approx 0,5$
- Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x) = 1.5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1;6]$.

1. e. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(3,11) & \approx & 1,5016 > 1,5 \\ f(3,12) & \approx & 1,4962 < 1,5 \end{array}\right|, \text{ donc } 3,11 < \alpha < 3,12.$$

Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\underline{\alpha \approx 3,11}$.

2. On admet que la dérivée seconde de f est définie par $f''(x) = 0,25x\,\mathrm{e}^{-0,5x}$.

2. a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-4;10]$.
La fonction dérivée seconde f'' s'exprime comme produit de deux facteurs. Le facteur $\mathrm{e}^{-0,5x}$ est strictement positif sur $[-4;10]$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. De ce fait, f'' est du signe du facteur $(0,5x)$ qui est tout simplement du signe de x. On obtient donc :

x	-4		0		10
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		f est concave	(Pt Infl.)	f est convexe	

La fonction f est donc concave sur l'intervalle [?4 ; 0] et convexe sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

2. b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées.
La fonction f change de concavité en $x = 0$, valeur pour laquelle la dérivée seconde s'annule en changeant de signe. Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion dont l'abscisse est 0 et dont l'ordonnée est $f(0) = 4$.

3.

3. a. On considère la fonction F définie par $F(x) = (-2x-12)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$. Comment peut-on montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$? *On ne demande pas d'effectuer cette vérification.*

Pour montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$ on montre que pour tout réel x de cet intervalle, $F'(x) = f(x)$.

3. b. Calculer $S = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

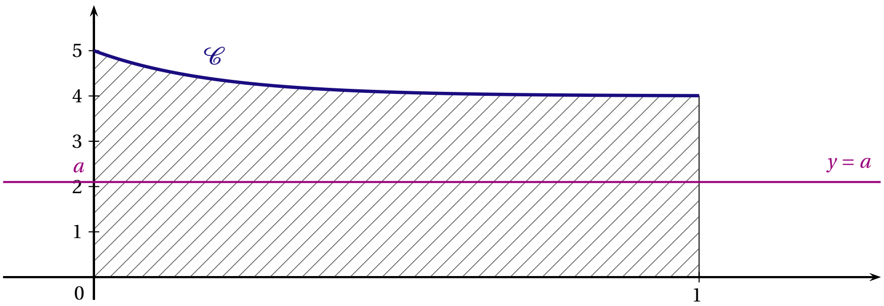
Le domaine grisé S est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 2$ et la droite d'équation $x = 4$. Puisque la fonction f est strictement positive (et continue) sur l'intervalle $[2\ ;\ 4]$, l'aire de ce domaine s'exprime, en unités d'aire par $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. On a donc :

$$\begin{aligned} S = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= F(4) - F(2) \\ &= -20\,\mathrm{e}^{-2} + 16\,\mathrm{e}^{-1} \\ &\approx \underline{3,18 \text{ u.a}} \end{aligned}$$

Exercice 4. 3 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 4 + e^{-5x}$. On a tracé dans le repère orthogonal ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. Le domaine $\mathscr{D}$ hachuré sur la figure est le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On veut partager le domaine hachuré en deux domaines de même aire par une droite d'équation $y = a$, parallèle à l'axe des abscisses, selon l'exemple donné ci-dessous.



1. **Justifier que la valeur $a = 3$ ne convient pas.**

 - La fonction f est définie et continue sur $[0\,;\,1]$. Elle y admet donc des primitives. Une primitive de f sur cet intervalle est la fonction F définie sur $[0\,;\,1]$ par :
$$F(x) = 4x + \frac{1}{-5} \times \mathrm{e}^{-5x}$$
 - La fonction f étant positive sur $[0\,;\,1]$, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$ est donnée, en unités d'aire, par $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ soit :
$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= F(1) - F(0) \\
&= 4 + \frac{1}{-5} \times \mathrm{e}^{-5} - \left(4 \times 0 + \frac{1}{-5} \times \mathrm{e}^{-5\times 0}\right) \\
\mathscr{A} &= 4 - \frac{\mathrm{e}^{-5}}{5} + \frac{1}{5} \\
\mathscr{A} &= 4{,}2 - \frac{\mathrm{e}^{-5}}{5} \approx 4{,}2 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$
 - Si $a = 3$ alors l'aire $\mathscr{A}'_a$ du rectangle situé sous la droite d'équation $y = a = 3$ est
$$\mathscr{A}'_3 = 3 \times 1 = 3 \text{ u.a.}$$
 - Conclusion : On obtient alors
$$\underline{\frac{1}{2} \times \mathscr{A} \approx 2{,}1 \text{ u.a.} < \mathscr{A}'_3 = 3 \text{ u.a.}}$$
 Donc $a = 3$ ne convient pas car le domaine hachuré n'est pas partagé en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = 3$.

2. **Déterminer à $0{,}1$ près une valeur de a qui convienne.**
 L'aire $\mathscr{A}'_a$ du rectangle situé sous la droite d'équation $y = a$ est
$$\mathscr{A}'_a = a \times 1 = a \text{ u.a.}$$
 Il suffit donc de choisir a tel que :
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \times \mathscr{A} = \mathscr{A}'_a &\iff \frac{1}{2} \times \left(4{,}2 - \frac{\mathrm{e}^{-5}}{5}\right) = a \\
&\iff a = 2{,}1 - \frac{\mathrm{e}^{-5}}{10} \approx \underline{2{,}1}
\end{aligned}$$

Fin du devoir