

Exercice 1

3 points

1. **Réponse c.**

Soit μ la valeur moyenne de g sur $[1 ; e]$, on a :

$$\mu = \frac{1}{e-1} \int_1^e \frac{2}{x} dx = \frac{2}{e-1} \int_1^e \frac{1}{x} dx = \frac{2}{e-1} [\ln x]_1^e = \frac{2}{e-1} (\ln e - \ln 1) = \frac{2}{e-1}.$$

2. **Réponse d.**

D'après le graphique, on lit que l'espérance $\mu = 1$.

On sait par ailleurs que $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ donc par lecture graphique, on en déduit que :

$$\begin{cases} 1 - 2\sigma = 0,6 \\ 1 + 2\sigma = 1,4 \end{cases} \text{ qui donnent toutes les deux } 2\sigma = 0,4, \text{ soit } \sigma = 0,2.$$

3. **Réponse a.**

Pour une proportion théorique $p = 0,15$ et une taille n de l'échantillon de 50, on a :

$$n = 50 \geq 30, np = 50 \times 0,15 = 7,5 \geq 5, n(1-p) = 50 \times 0,85 = 42,5.$$

Les conditions de validité de calcul de l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont remplies et on a :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

La borne inférieure :

$$p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,15 - 1,96 \frac{\sqrt{0,15(1-0,15)}}{\sqrt{50}} \approx 0,051 \text{ par défaut.}$$

La borne supérieure :

$$p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,15 + 1,96 \frac{\sqrt{0,15(1-0,15)}}{\sqrt{50}} \approx 0,249 \text{ par excès.}$$

Ainsi, l'intervalle de fluctuation cherché est $I = [0,051 ; 0,249]$.

Exercice 2

6 points

Partie A

1. La réduction des GES de 8 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{8}{100} = 0,92$.

Il vient donc que si la France a respecté ses engagements, alors la quantité de GES émise en 2012 doit être inférieure à :

$$559 \times 0,92 = 514,28$$

Or, en 2011 (donc avant la date buttoir) la quantité de GES était déjà inférieure à 514,2 mégatonnes.

En 2011, la France respectait déjà cet engagement.

2. Soit Q la quantité émise en 2010. On sait que la quantité atteinte de 486 mégatonnes en 2011 représentait déjà une baisse de 5,6 % par rapport à 2010. Soit :

$$Q \times \left(1 - \frac{5,6}{100} \right) = 486$$

D'où $Q = \frac{486}{0,944} \approx 514,8$ mégatonnes.

La quantité émise de GES en équivalent CO₂ en 2010 était d'environ 514,8 mégatonnes.

Partie B

1. u_0 est la quantité émise en 2005, soit $u_0 = 41$.

u_1 est la quantité émise en 2006 qui représente une réduction de 2 % par rapport à 2005 à laquelle on doit rajouter les 200 tonnes (soit 0,2 millier de tonnes) dues à l'implantation des nouvelles entreprises :

$$u_1 = 41 \times \left(1 - \frac{2}{100}\right) + 0,2 = 40,38 \text{ milliers de tonnes.}$$

2. Lors de l'année u_{n+1} la quantité émise représente 98 % de la quantité émise l'année n , soit $0,98u_n$.

On rajoute à cette quantité celle émise par les nouvelles entreprises, d'où :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,98u_n + 0,2$$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \\ &= 0,98u_n + 0,2 - 10 \\ &= 0,98u_n - 9,8 \\ &= 0,98\left(u_n - \frac{9,8}{0,98}\right) \\ &= 0,98(u_n - 10) \\ &= 0,98v_n \end{aligned}$$

Par définition, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,98$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 10 = 31$.

b) Puisque (v_n) est une suite géométrique, on a :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n = 31 \times 0,98^n.$$

c) En remplaçant v_n par son expression dans la relation précédente, on obtient :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n - 10 = 31 \times 0,98^n, \text{ soit } u_n = 31 \times 0,98^n + 10.$$

4. a) $0 < 0,98 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,98^n = 0$ et par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10$.

b) Au bout d'un certain nombre d'années, la quantité de GES en équivalent CO₂ émise chaque année sera de 10 milliers de tonnes.

5. a)

1	Variables
2	U est du type nombre
3	n est du type nombre entier
4	Début Algorithme
5	U prend la valeur 41
6	n prend la valeur 0
7	Tant que $U > 20,5$ faire
8	Début Tant que
9	U prend la valeur $0,98 \times U + 0,2$ ou bien $31 \times 0,98^n + 10$
10	n prend la valeur $n + 1$
11	Fin Tant que
12	Afficher n
13	Fin Algorithme

b) Le résultat affiché permet de dire que la zone industrielle émettra moins de 20,5 milliers de tonnes au bout de 54 ans, soit en 2059.

Exercice 3

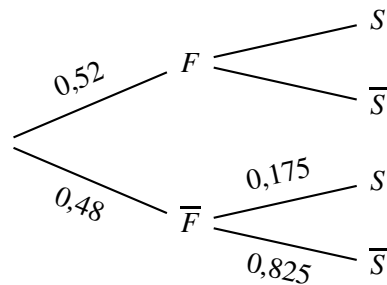
5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L.

Partie A

CORRIGÉ LIBAN ES JUIN 2017

1. 18 % des demandeurs d'emploi sont sans expérience, donc $p(S) = 0,18$.
Parmi les hommes demandeurs d'emploi, 17,5 % sont sans expérience, donc $p_{\overline{F}}(S) = 0,175$.
- 2.



3. $p(\overline{F} \cap S) = p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(S) = 0,48 \times 0,175 = 0,084$.
La probabilité qu'un demandeur d'emploi choisi au hasard soit une femme et sans expérience est de 0,084. (8,4 % des demandeurs d'emploi sont des femmes sans expérience).
4. On cherche $p_S(\overline{F}) = \frac{p(\overline{F} \cap S)}{p(S)} = \frac{0,084}{0,18} = \frac{7}{15} \approx 0,467$.
Sachant que le demandeur d'emploi est sans expérience, la probabilité que ce soit un homme est d'environ 0,467.
5. On cherche $p_F(S) = \frac{p(F \cap S)}{p(F)}$. Il faut déterminer $p(F \cap S)$, pour cela on sait que F et \overline{F} forment une partition de l'univers composé par les demandeurs d'emploi, par conséquent :

$$p(S) = p(S \cap F) + p(S \cap \overline{F}) \text{ soit } 0,18 = p(S \cap F) + 0,084. \text{ Par conséquent :}$$

$$p(S \cap F) = 0,18 - 0,084 = 0,096$$

$$\text{On en déduit } p_F(S) = \frac{p(F \cap S)}{p(F)} = \frac{0,096}{0,52} \approx 0,185.$$

Sachant que le demandeur d'emploi est une femme, la probabilité qu'elle soit sans expérience est d'environ 0,185.

Partie B

On choisit au hasard une fiche d'un demandeur d'emploi, c'est celle d'une personne sans expérience ou non. Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli donc le succès est « le demandeur d'emploi est sans expérience » de probabilité $p = 0,18$.

On répète de manière identique et indépendante (situation assimilée à un tirage avec remise) 5 fois de suite cette épreuve. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0,18$.

Soit X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de succès dans ce schéma, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0,18)$.

$$\text{On cherche } p_{5X \geq 1} = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0,18^0 \times (1 - 0,18)^{5-0} = 0,84^5 \approx 0,418.$$

La probabilité que parmi les 5 fiches tirées, au moins une soit celle d'un demandeur d'emploi sans expérience est de 0,418.

Exercice 3

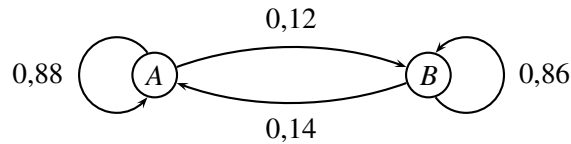
5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

- 1.

CORRIGÉ LIBAN ES JUIN 2017



2. On sait qu'en 2015, Alpha possède 30 % du marché et donc que Bravo possède 70 % du marché, d'où :

$$a_0 = 0,3 \quad b_0 = 0,7$$

3. En 2018, on a $n = 3$, on recherche donc P_3 qui est donné par $P_3 = P_0 \times M^3$.

À la calculatrice, $P_3 = (0,442 \quad 0,558)$ où les valeurs sont arrondies à 10^{-3} .

En 2018, la part de marché pour l'opérateur Alpha sera d'environ 44,2 % selon ce modèle.

4. a) L'état stable vérifie la relation $P = P \times M$, soit :

$$(x \quad y) = (x \quad y) \times \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$$

$$(x \quad y) = (0,88x + 0,14y \quad 0,12x + 0,86y)$$

Si deux matrices sont égales alors leurs coefficients sont égaux deux à deux, d'où :

$$\begin{cases} 0,88x + 0,14y = x \\ 0,12x + 0,86y = y \end{cases} \iff \begin{cases} -0,12x + 0,14y = 0 \\ 0,12x - 0,14y = 0 \end{cases}$$

C'est deux équations sont les mêmes, on n'en garde qu'une : $0,12x - 0,14y = 0$ mais par ailleurs l'état stable est un état probabiliste donc $x + y = 1$, d'où le nouveau système :

$$\begin{cases} 0,12x - 0,14y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 0,12x - 0,14y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 - x \\ 0,12x - 0,14(1 - x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 - x \\ 0,12x - 0,14 + 0,14x = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = \frac{0,14}{0,26} = \frac{7}{13} \\ y = 1 - \frac{7}{13} = \frac{6}{13} \end{cases} \text{ L'état stable est donc } P = \left(\frac{7}{13} \quad \frac{6}{13} \right).$$

c) Au bout d'un grand nombre d'années, la répartition du marché entre les deux opérateurs sera de :

53,8 % pour Alpha et 46,2 % pour Bravo

Partie B

1.

C	A	B	D	E	F	H	I	G
0	25(C)	30(C)	20(C)	∞	∞	∞	∞	∞
1	25(C)	30(C)	20(C)	40(D)	∞	∞	35(D)	∞
2	25(C)	30(A)		40(D)	∞	35(A)	35(D)	∞
3		30(A-C)		40(D)	∞	35(A)	35(D)	∞
4				40(D)	45(H)	35(A)	35(D)	55(H)
5				40(D)	45(H)		35(D)	55(H)
6				40(D)	45(H)			55(H)
7					45(H)			50(F)
8								50(F)

Le trajet le moins cher à déployer entre C et G est C - A - H - F - G.

2. Il coûtera 50 000€.

Exercice 4

6 points

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $[0 ; 10]$ et pour tout $x \in [0 ; 10]$, on a :

$$f'(x) = -\frac{(0,5 + 100e^{-x})'}{(0,5 + 100e^{-x})^2} = -\frac{-100e^{-100x}}{(0,5 + 100e^{-x})^2} = \frac{100e^{-x}}{(0,5 + 100e^{-x})^2}.$$

2. a) Pour tout $x \in [0 ; 10]$,

$$100e^{-x} - 0,5 \iff \geq 0$$

$$e^{-x} \geq \frac{0,5}{100}$$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $[0 ; 10]$

$$-x \geq \ln 0,005$$

$$x \leq -\ln 0,005$$

b) Pour tout $x \in [0 ; 10]$, $\frac{100e^{-x}}{(0,5 + 100e^{-x})^3} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $100e^{-x} - 0,5$.

D'après le 2) a. on sait que $f''(x) \geq 0$ équivalent à $x \leq -\ln 0,005$, donc :

x	0	$-\ln 0,005$	10
$f''(x)$	+	0	-

3. D'après la question 2), on sait que $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $-\ln 0,005$ donc la courbe \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion I d'abscisse $-\ln 0,005$.

4. On a vu que : $f''(x) \geq 0 \iff x \leq -\ln 0,005$ soit $f''(x) \leq 0 \iff x \geq -\ln 0,005$

Or, la fonction f est concave si et seulement si $f''(x) \leq 0$.

On en déduit que f est concave sur $[-\ln 0,005 ; 10]$.

Partie B

1. a) $f(10) = \frac{1}{0,5 + 100e^{-10}} \approx 1,98$.

b) $x = 10$ représente 250 années en plus par rapport à 1900, donc d'après la question 1), on en déduit que la température ce sera élevée de 1,98 °C en 2150 selon ce modèle. L'accord de Paris sera donc respecté.

2. a) On a vu que l'abscisse du point d'inflexion est $-\ln 0,005$. Or, ici pour ce modèle l'unité vaut 25 ans donc, le point d'inflexion de la courbe de température aura pour abscisse $-\ln 0,005 \times 25 \approx -132,47$. L'année correspondant à l'abscisse du point d'inflexion est à l'unité près 2032.

b) Calculons $f(-\ln 0,005)$:

$$f(-\ln 0,005) = \frac{1}{0,5 + 100e^{\ln 0,005}} = \frac{1}{0,5 + 100 \times 0,005} = 1.$$

L'élévation en température depuis 1900 s'élèvera de 1°C en 2032 au point d'inflexion.

CORRIGÉ LIBAN ES JUIN 2017

3. a) En 2033, la température terrestre continuera d'augmenter car au vu du graphique la fonction est croissante sur $[0 ; 10]$.

On peut aussi utiliser le fait que pour tout $x \in [0 ; 10]$, $f'(x) = \frac{100e^{-x}}{(0,5 + 100e^{-x})^2} > 0$ comme rapport de deux expressions strictement positives.

- b) En 2033, la vitesse du réchauffement climatique commencera à diminuer car la fonction f est concave sur $[-\ln 0,005 ; 10]$.

4. Il faut résoudre l'équation $f(x) = 1,5$

$$\begin{aligned} f(x) = 1,5 &\iff \frac{1}{0,5 + 100e^{-x}} = \frac{3}{2} \\ &\iff \frac{1}{2} + 100e^{-x} = \frac{2}{3} \\ &\iff 100e^{-x} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \\ &\iff e^{-x} = \frac{1}{600} \\ &\iff -x = \ln \frac{1}{600} \\ &\iff -x = -\ln 600 \\ &\iff x = \ln 600 \end{aligned}$$

L'année où ce seuil sera atteint selon ce modèle est $1900 + 25 \times \ln 600 \approx 2060$.