Math93.com

Baccalauréat 2017 - ES/L Liban

Série ES/L Obli. et Spé.
5 Juin 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

Exercice 1. QCM — 3 points

Commun à tous les candidats

Question 1 (Réponse c)

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{2}{x}$.
La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$ est :

a. 2   **b** $\frac{1}{\mathrm{e}-1}$ $\boxed{\textbf{c. } \frac{2}{\mathrm{e}-1}}$ **d.** $\frac{-2}{\mathrm{e}-1}$

Preuve.
La fonction g est définie et continue sur $]0\,;\,+\infty[$ donc elle y admet des primitives. Une primitive de g sur cet intervalle est

$$G\ :\ x \to 2\ln x$$

La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$ est alors :

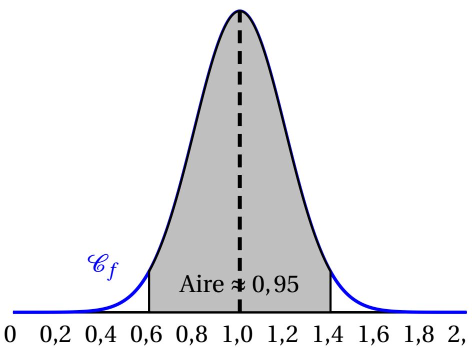
$$m=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\times(G(\mathrm{e})-G(1))$$

$$m=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\times(2\ln\mathrm{e}-2\ln 1)$$

$$m=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\times(2-0)=\boxed{\frac{2}{\mathrm{e}-1}}$$

Question 2 (Réponse d)

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale. La courbe de la figure ci-dessous représente la fonction de densité f associée à la variable X.



- **a.** L'espérance de X est $0,4$.
- **b.** L'espérance de X est $0,95$.
- **c.** L'écart-type de X est environ $0,4$.
- $\boxed{\textbf{d. } \text{L'écart-type de } X \text{ est environ } 0,2.}$

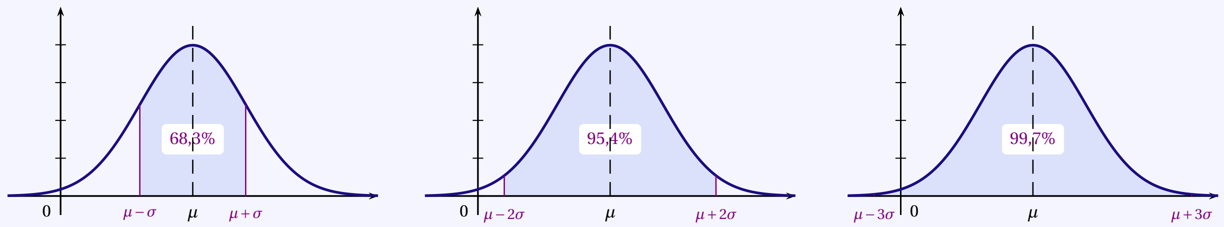
Preuve.
Si X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, le symétrie de la courbe semble indiquer que la moyenne $\mu = 1$. En outre on a $P(0,6 < X < 1,4) \approx 0,95$.

- Méthode 1 : On teste les réponses proposées.
  - L'axe de symétrie de la courbe impose que $\mu = 1$ ce qui exclut les deux premières réponses.
  - Si X suit une loi normale de moyenne$\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,4$, la calculatrice donne :
  $$P(0,6 < X < 1,4) \approx 0.682689$$
  On exclut donc aussi la réponse 3.
  - Si X suit une loi normale de moyenne$\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,2$, la calculatrice donne :
  $$P(0,6 < X < 1,4) \approx 0.9545$$
  La bonne réponse est donc la d.
- Méthode 2 : on applique une propriété du cours.

  Rappelons un théorème du cours :

Propriété 1 (dite des « 1 σ, 2 σ, 3 σ »)
Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ alors :

- $P\left(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma\right) \approx 0,683$.
- $P\left(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma\right) \approx 0,954$.
- $P\left(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma\right) \approx 0,997$.



$X \in [\mu-\sigma;\mu+\sigma]$ $\quad$ $X \in [\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]$ $\quad$ $X \in [\mu-3\sigma;\mu+3\sigma]$

Donc puisque ici la moyenne est visiblement $\mu = 1$:

$$\begin{aligned} P(0,6 < X < 1,4) \approx 0,95 &\iff P(1-0,4 < X < 1+0,4) \approx 0,95 \\ &\iff P(1-2\times 0,2 < X < 1+2\times 0,2) \approx 0,95 \end{aligned}$$

Or d'après la propriété :
$$P(1-2\times\sigma < X < 1+2\times\sigma) \approx 0,95$$

Donc par identification, on a : $\underline{\sigma \approx 0,2}$, la bonne réponse est la (d.)

Question 3 (Réponse a)

À l'occasion de son inauguration, un hypermarché offre à ses clients un ticket à gratter par tranche de 10 euros d'achats. L'hypermarché affirme que 15 % des tickets à gratter sont gagnants, c'est-à-dire donneront droit à un bon d'achat de 5 euros. Amandine a reçu 50 tickets à gratter après un achat de 500 euros dans cet hypermarché. Deux d'entre eux étaient gagnants. On suppose que le nombre de tickets à gratter est suffisamment important pour considérer qu'un échantillon de 50 tickets correspond à un tirage aléatoire avec remise.

- $\boxed{\textbf{a.}}$ L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est [0,051 ; 0,249], les bornes étant arrondies au millième.
- **b.** L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est [0,100 ; 0,200], les bornes étant arrondies au millième.
- **c.** La fréquence de tickets gagnants reçus par Amandine est $\dfrac{50}{500}$.
- **d.** Amandine peut annoncer avec un risque de 5 % que l'affirmation de l'hypermarché n'est pas mensongère.

Preuve.

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 50$ tickets. Il est constaté que 2 d'entre eux sont gagnants. ». Donc la fréquence observée tickets gagnants est
  $$f = 2 \div 50 = 0{,}04 \text{ soit } \underline{f = 0{,}04}$$
  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion de tickets gagnants est $\underline{p = 15\%}$ ».
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$
Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 50$, $p = 15$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 50 \geq 30 \\ \checkmark & np = 50 \times 0{,}15 = 7{,}5 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 50 \times 0{,}85 = 42{,}5 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}15 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}15 \times 0{,}85}}{\sqrt{50}}\ ;\ 0{,}15 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}15 \times 0{,}85}}{\sqrt{50}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}05102$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}051}$.
- $p + 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}24898$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}249}$.

$$\boxed{I_{50} \approx [0{,}051\ ;\ 0{,}249]}$$

- **Conclusion**
  La bonne réponse est la <u>réponse a</u>. La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle, $f = 0{,}04 \notin I$ donc le résultat du contrôle remet en question l'hypothèse, au seuil de 95%.

Exercice 2. 6 points

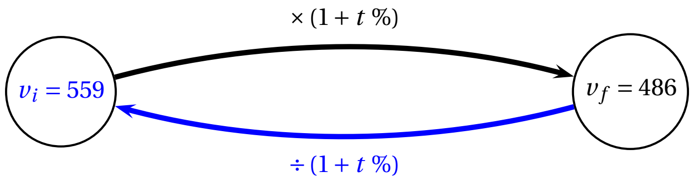
Commun à tous les candidats
Les deux parties sont indépendantes

Partie A : L'accord de Kyoto (1997)

Le principal gaz à effet de serre (GES) est le dioxyde de carbone, noté CO_2. En 2011, la France a émis 486 mégatonnes de GES en équivalent CO_2 contre 559 mégatonnes en 1990.

1. **Dans l'accord de Kyoto, la France s'est engagée à réduire ses GES de 8 % entre 1990 et 2012. Peut-on dire qu'en 2011 la France respectait déjà cet engagement? Justifier la réponse.**
On peut par exemple calculer le *pourcentage d'évolution* ou *taux d'évolution* de $v_i = 559$ à $v_f = 486$.

$$\frac{v_f - v_i}{v_i} = \frac{t}{100} = t\ \%$$

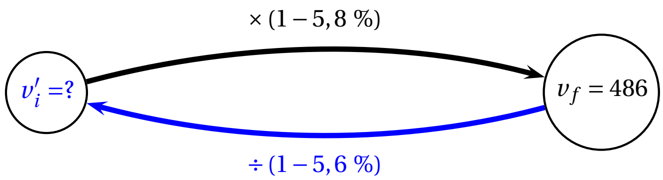


On obtient :

$$t\% = \frac{486 - 559}{559} \approx -0,13$$

Donc les GES ont été réduits d'environ 13% de 1990 à 2011 et donc la France respectait déjà son engagement .

2. **Sachant que les émissions de 2011 ont marqué une baisse de 5,6 % par rapport à 2010, calculer le nombre de mégatonnes en équivalent CO_2 émises par la France en 2010. Arrondir le résultat à 0,1.**



Donc le nombre de mégatonnes en équivalent CO_2 émises par la France en 2010 est, arrondie au dixième :

$$v'_i = \frac{486}{(1 - 5,8\ \%)} \approx \underline{514.8}$$

Partie B : Étude des émissions de gaz à effet de serre d'une zone industrielle

Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installées sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent CO_2. En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO_2 au total. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005 + n$.

1. **Déterminer u_0 et u_1.**
   - $u_0 = 41$ car c'est le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de l'année 2005.
   - u_1 est le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis au cours de l'année 2006.
   Les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % des u_0 de 2005 , ce qui revient à multiplier u_0 par 0,98. Et chaque année, les implantations de nouvelles génèrent 200 tonnes de GES soit 0,2 milliers de tonnes.
   On obtient :
   $$u_1 = u_0 \times (1 - 2\%) + 200 = \underline{40.38}$$

2. **Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,98 \times u_n + 0,2$.**
u_{n+1} est le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis au cours de l'année $2005 + n + 1$.
Les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % des u_n de $2005 + n$, ce qui revient à multiplier u_n par 0,98. Et chaque année, les implantations de nouvelles génèrent 200 tonnes de GES soit 0,2 milliers de tonnes.
On obtient pour tout entier naturel n, :

$$u_{n+1} = u_n \times (1 - 2\%) + 200 = \underline{0,98 \times u_n + 0,2}$$

3. *On considère la suite* (v_n) *définie, pour tout entier naturel* n*, par* $v_n = u_n - 10$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,98. Préciser son premier terme.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 41 \\ u_{n+1} & = 0{,}98 \times u_n + 0{,}2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 10 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \\ v_{n+1} &= (0{,}98\ u_n + 0{,}2) - 10 \\ v_{n+1} &= 0{,}98 \times u_n - 9{,}8 \\ v_{n+1} &= 0{,}98 \times \left(u_n + \frac{-9{,}8}{0{,}98}\right) \\ v_{n+1} &= 0{,}98 \times (u_n - 10) \\ v_{n+1} &= 0{,}98 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}98$, et de premier terme $v_0 = 31$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 10 \\ v_0 &= 41 - 10 \\ v_0 &= 31 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 31 \\ v_{n+1} & = 0{,}98 \times v_n \end{cases} \ ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}98$, et de premier terme $v_0 = 31$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ;\ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ v_n = 31 \times (0{,}98)^n}$$

3. c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 31 \times (0,98)^n + 10$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 10$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 10$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ u_n = 31 \times (0{,}98)^n + 10}$$

4.

4. a. Calculer la limite de la suite (u_n).

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0,98 < 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n \to +\infty} 31 \times (0,98)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} 31 \times (0,98)^n + 31 = 31$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 10}$$

4. b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
Au bout d'un grand nombre d'année cette zone industrielle émettra 10 milliers de tonnes de CO_2.

5. *À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on se propose de déterminer l'année à partir de laquelle la zone industrielle aura réduit au moins de moitié ses émissions de CO_2, par rapport à l'année 2005.*

5. a. Recopier et compléter les lignes 7 et 9 de l'algorithme.

```
1   Variables
2         U est du type nombre
3         n est du type nombre entier
4   Début Algorithme
5         U prend la valeur 41
6         n prend la valeur 0
7         Tant que [U > 20.5] faire
8               Début Tant que
9               U prend la valeur [U × 0.98 + 0.2]
10              n prend la valeur n + 1
11              Fin Tant que
12        Afficher n
13  Fin Algorithme
```

5. b. L'algorithme affiche 54. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
Cela signifie qu'il faudra attendre 54 années avant que cette zone industrielle ait réduit au moins de moitié ses émissions de CO2 par rapport à l'année 2005. Cela se produira donc en 2059.

Remarque : on peut le vérifier à l'aide de la calculatrice.

n	0	1	2	3	4	5	...	53	54	55
u_n	41.000	40.3800	39.772	39.177	38.593	38.022	...	$\mathbf{20.625 > 20.5}$	$\mathbf{20.413 < 20.5}$	20.205
Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010	...	2058	**2059**	2060

Exercice 3. 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Une agence Pôle Emploi étudie l'ensemble des demandeurs d'emploi selon deux critères, le sexe et l'expérience professionnelle. Cette étude montre que :

- 52 % des demandeurs d'emploi sont des femmes et 48 % sont des hommes;
- 18 % des demandeurs d'emploi sont sans expérience et les autres sont avec expérience;
- parmi les hommes qui sont demandeurs d'emploi, on sait que 17,5 % sont sans expérience.

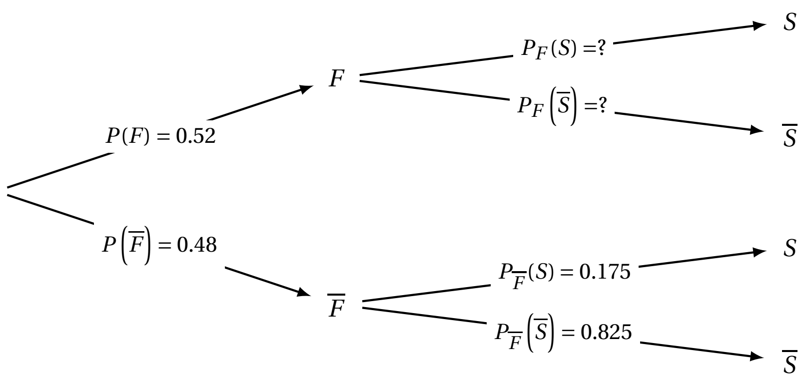
Partie A

On prélève au hasard la fiche d'un demandeur d'emploi de cette agence. On note :

- S : l'évènement « le demandeur d'emploi est sans expérience »;
- F : l'évènement « le demandeur d'emploi est une femme ».

1. **Préciser $p(S)$ et $p_{\overline{F}}(S)$.**
   - 18 % des demandeurs d'emploi sont sans expérience donc $p(S) = \underline{0,18}$.
   - parmi les hommes qui sont demandeurs d'emploi, on sait que 17,5 % sont sans expérience donc $p_{\overline{F}}(S) = \underline{0,175}$

2. **Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés par les probabilités associées.**
   On sait en outre que :
   - 52 % des demandeurs d'emploi sont des femmes et 48 % sont des hommes donc $p(F) = 0,52$.



3. **Démontrer que $p\left(\overline{F} \cap S\right) = 0,084$. Interpréter le résultat.**

$$p\left(\overline{F} \cap S\right) = p\left(\overline{F}\right) \times p_{\overline{F}}(S) = 0,48 \times 0,175 = \underline{0,084}$$

Ce qui signifie que sur l'ensemble des demandeurs d'emploi, <u>8,4% sont des hommes sans expérience</u>.

4. **La fiche prélevée est celle d'un demandeur d'emploi sans expérience. Calculer la probabilité pour que ce soit un homme**.
   La probabilité cherchée est $p_S\left(\overline{F}\right)$. On a en utilisant les résultats des questions (A.1.) et (A.3.) :

$$p_S\left(\overline{F}\right) = \frac{p\left(\overline{F} \cap S\right)}{p(S)} = \frac{0,084}{0,18} \approx \underline{0,467}$$

5. Sachant que la fiche prélevée est celle d'une femme, calculer la probabilité que ce soit la fiche d'un demandeur d'emploi sans expérience.

La probabilité cherchée est $p_F(S)$. Les évènements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(S\cap F) + p\left(S\cap \overline{F}\right) \\ 0,18 &= p(F)\times p_F(S) + p\left(S\cap \overline{F}\right) \\ 0,18 &= 0,52\times p_F(S) + 0,084 \\ 0,18 - 0,081 &= 0,52\times p_F(S) \\ 0,096 &= 0,52\times p_F(S) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$p_F(S) = \frac{0,096}{0,52} \approx \underline{0,185}$$

Sachant que la fiche prélevée est celle d'une femme, calculer la probabilité que ce soit la fiche d'un demandeur d'emploi sans expérience est d'environ 0,185.

Partie B (EPI)

La responsable de l'agence décide de faire le point avec cinq demandeurs d'emploi qui sont suivis dans son agence. Pour cela, elle prélève cinq fiches au hasard. On admet que le nombre de demandeurs d'emplois dans son agence est suffisamment grand pour assimiler cette situation à un tirage avec remise. En justifiant la démarche, calculer la probabilité que, parmi les cinq fiches tirées au hasard, il y ait au moins une fiche de demandeur d'emploi sans expérience.

Notons X une variable aléatoire qui compte le nombre de fiches de demandeurs d'emploi sans expérience tirées lors de cette expérience aléatoire.

- **Modélisation**

  Il y a répétition de $n = 5$ événements indépendants et identiques (on tire la fiche d'un demandeur d'emploi).
  Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

  - succès de probabilité $p = 0.18$ quand la fiche est celle d'un demandeur d'emploi sans expérience;
  - et échec de probabilité $1 - p = 0,82$ sinon.

  Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 5$ épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0.18$ suit une loi binomiale de paramètres $\underline{n = 5}$ et $\underline{p = 0.18}$.
  On peut écrire :

  $$X \text{ suit } \mathscr{B}\left(5\,;\,0.18\right) \text{ ou } X \sim \mathscr{B}\left(5\,;\,0.18\right).$$

- **Calcul**.
  Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0.18$ on a :

  $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{5}{k} \times 0.18^k \times (0,82)^{5-k}$$

  La probabilité que, parmi les cinq fiches tirées au hasard, il y ait au moins une fiche de demandeur d'emploi sans expérience est $p(X \geq 1)$. En passant à l'évènement contraire on a :

  $$\begin{aligned} p(X\geq 1) &= 1 - p(X = 0) \\ p(X \geq 1) &= 1 - 0,82^5 \end{aligned}$$

  Donc :

  $$\boxed{p(X\geq 1) \approx \underline{0,629}}$$

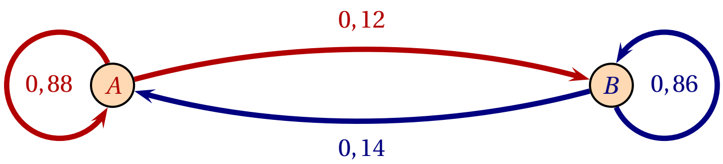
Exercice 3. Spécialité — 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Deux opérateurs Alpha et Bravo se partagent le marché de la téléphonie mobile dans un pays. En 2015, l'opérateur Alpha possède 30 % du marché de téléphonie mobile. Le reste appartient à l'opérateur Bravo. On étudie l'évolution dans le temps du choix des abonnés de 2015 pour l'un ou l'autre des opérateurs. Chaque abonné conserve un abonnement téléphonique, soit chez l'opérateur Alpha soit chez l'opérateur Bravo. On estime que, chaque année :

1. Dessiner ce graphe probabiliste.

- 12 % des abonnés de l'opérateur Alpha le quittent et souscrivent un abonnement chez l'opérateur Bravo.
- 86 % des abonnés de l'opérateur Bravo lui restent fidèles, les autres le quittent pour l'opérateur Alpha.
- On modélise cette situation par un graphe probabiliste à deux sommets Alpha et Bravo : A est l'évènement : « l'abonné est chez l'opérateur Alpha » et B est l'évènement : « l'abonné est chez l'opérateur Bravo ».



La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1[ère] ligne : probabilité d'aller de A vers A, de A vers B ;
- 2[ème] ligne : probabilité d'aller de B vers A, de B vers B.

On obtient donc (la matrice était donnée) :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}}$$

2. Donner a_0 et b_0.

- *On note pour tout entier naturel n : a_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Alpha l'année $2015+n$ et b_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Bravo l'année $2015+n$.*
- *On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015+n$.*

En 2015, l'opérateur Alpha possède 30 % du marché de téléphonie mobile. Le reste appartient à l'opérateur Bravo donc l'état initial est :

$$\underline{P_0 = \begin{pmatrix} a_0 = 0,3 & b_0 = 0,7 \end{pmatrix}}$$

3. Montrer qu'en 2018, il y aura environ 44,2 % des abonnés chez l'opérateur Alpha.

L'état probabiliste en 2018 est donné par la matrice ligne $P_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Or on sait que pour tout entier n on a :

$$P_{n+1} = P_{n+1} \times M \quad \text{et} \quad P_n = P_0 \times M^n$$

La calculatrice nous donne :

$$M^3 \approx \begin{pmatrix} 0,725 & 0,275 \\ 0,32 & 0.68 \end{pmatrix}$$

Donc

$$P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \times M^3 \approx \begin{pmatrix} 0,442 & 0,558 \end{pmatrix}$$

Donc $\underline{a_3 \approx 0,042}$, ce qui signifie qu'en 2018, il y aura environ 44,2 % des abonnés chez l'opérateur Alpha.

4. Les deux opérateurs voudraient connaître la répartition de l'ensemble des abonnés sur le long terme.
On note $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état stable de la répartition des abonnés.

4. a. Montrer que les nombres x et y sont solutions du système : $\begin{cases} 0,12x - 0,14y &= 0 \\ x+y &= 1. \end{cases}$

Définition 1 (État stable)

Un état stable d'un graphe probabiliste à deux états, de matrice de transition M est un état $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} P = P \times M \\ a+b=1 \end{cases}$$

On note $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état stable de la répartition des abonnés. Alors par définition on a :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} P = P \times M \\ x+y=1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0.86 \end{pmatrix} \\ x+y=1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,88x+0,14y & 0,12x+0,86y \end{pmatrix} \\ x+y=1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0,88x+0,14y \\ y = 0,12x+0,86y \\ y = 1-x \end{cases} \\
&\iff \boxed{\begin{cases} 0,12x - 0,14y = 0 \\ x+y=1 \end{cases}}
\end{aligned}$$

4. b. Résoudre le système précédent dans l'ensemble des réels.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 0,12x - 0,14y = 0 \\ x+y=1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 0,12x - 0,14(1-x) = 0 \\ y = 1-x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 0,12x - 0,14 + 0,14x = 0 \\ y = 1-x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 0,26x = 0,14 \\ y = 1-x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{7}{13} \approx 0,538 \\ y = \dfrac{6}{13} \approx 0,462 \end{cases}
\end{aligned}$$

4. c. Déterminer la répartition des abonnés entre les deux opérateurs au bout d'un grand nombre d'années. Arrondir les pourcentages à 0,1 %.

D'après la question précédente, l'état stable du système est la matrice P telle que : $P \approx \begin{pmatrix} 0,538 & 0,462 \end{pmatrix}$

Propriété 2 (État stable)

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M <u>ne comporte pas de 0</u>, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.
Cet état stable vérifie l'égalité :

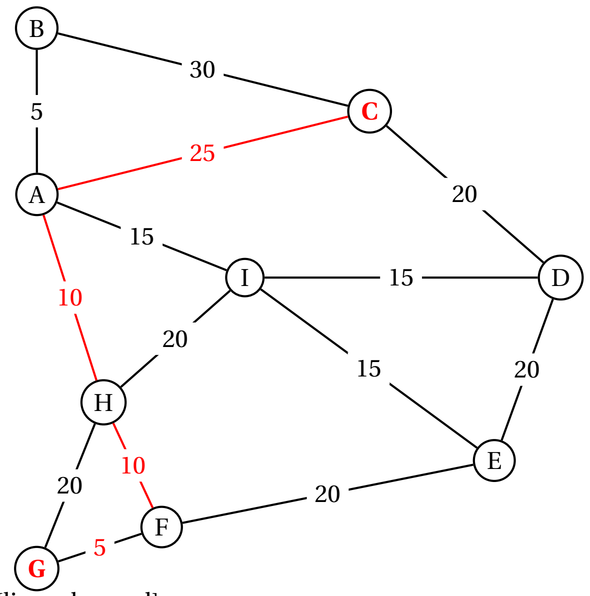
$$P = P \times M$$

Au bout d'un grand nombre d'années, l'opérateur Alpha aura donc environ 53,8% des parts de marché et l'opérateur Bravo aura environ 46,2% des parts de marché.

Partie B

Un opérateur français doit développer son réseau de fibre optique dans la région des stations de ski notées : A, B, C, D, E, F, G, H, I à l'approche de la saison touristique. À ce jour, seule la station C est reliée au réseau national de fibre optique. Le coût des tronçons du réseau de fibre optique varie selon le relief des montagnes et des vallées. L'opérateur a mené une étude afin de déterminer son plan de déploiement. Dans le graphe ci-dessous :

- les sommets représentent les stations de ski ;
- les arêtes représentent les différents tronçons qu'il est possible de déployer ;
- le poids de chaque arête correspond au coût associé, en milliers d'euros.



[linecolor=red]

1. Avec l'algorithme de Dijkstra, déterminer le tracé de fibre optique le moins cher à déployer, entre les stations C et G.
Remarque : L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.

de ... à	A	B	D	E	F	H	I	G
C	25C	30C	**20C**	∞	∞	∞	∞	∞
D(20C)	**25C**	30C		40D	∞	∞	35D	∞
A(25)		**30C**		40D	∞	35A	35D	∞
B(30)				40D	∞	**35A**	35D	∞
H(35)				40D	45H		**35D**	55H
I(35)				**40D**	45H			55H
E(40)					**45H**			55H
F(45)								**50F**
G(50)								

Le chemin le plus court pour relier C à G est donc de :

$$\boxed{C \xrightarrow{25} A \xrightarrow{10} H \xrightarrow{10} F \xrightarrow{5} G}$$

2. Déterminer, en milliers d'euros, le coût de ce tracé.
Le coût de ce tracé$C \xrightarrow{25} A \xrightarrow{10} H \xrightarrow{10} F \xrightarrow{5} G$ est de 50 milliers d'euros.

Exercice 4. 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle [0; 10], on a $f'(x) = \dfrac{100e^{-x}}{(0,5+100e^{-x})^2}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0\,;\,10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{0,5+100e^{-x}} \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,10]$.
La fonction f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{-v'}{v^2}$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,10]\,;\; f(x) = \frac{1}{v(x)} \quad : \left\{ \begin{array}{ll} v(x) & = 0,5+100e^{-x} \\ v'(x) & = -100e^{-x} \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,10],\;\; f'(x) = \frac{-v'(x)}{v(x)^2} = \frac{100e^{-x}}{(0,5+100e^{-x})^2}}$$

Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante : $f''(x) = \dfrac{100e^{-x}(100e^{-x}-0,5)}{(0,5+100e^{-x})^3}$.

2.

2. a. Montrer que, dans l'intervalle [0; 10], l'inéquation $100e^{-x} - 0,5 \geqslant 0$ est équivalente à l'inéquation $x \leqslant -\ln(0,005)$.

Pour x dans l'intervalle $[0; 10]$ on a :

$$\begin{aligned} 100e^{-x} - 0,5 \geqslant 0 &\iff 100e^{-x} \geqslant 0,5 \\ &\iff e^{-x} \geqslant 0,005 \end{aligned}$$

On compose alors par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} &\iff -x \geqslant \ln 0,005 \\ 100e^{-x} - 0,5 \geqslant 0 &\iff \underline{x \leq -\ln 0,005} \end{aligned}$$

2. b. En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle [0; 10].

Pour tout réel x de $[0\,;\,10]$ on a :

$$f''(x) = 100e^{-x} \times \left(100e^{-x} - 0,5\right) \times \frac{1}{(0,5+100e^{-x})^3}$$

La fonction dérivée seconde s'exprime sous la forme d'un produit de trois facteurs dont 2 sont strictement positifs sur $[0\,;\,10]$. En effet, la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$ on a pour tout réel x de $[0\,;\,10]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 100e^{-x} > 0 \\ (0,5+100e^{-x})^3 > 0 \end{array} \right.$$

La fonction dérivée seconde est donc du signe du facteur $(100e^{-x} - 0,5)$ et d'après l'étude menée lors de la question (A.2.a) on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 100e^{-x} - 0,5 \geqslant 0 \iff x \leq -\ln 0,005 \\ 100e^{-x} - 0,5 = 0 \iff x = -\ln 0,005 \end{array} \right.$$

On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	0		$-\ln 0.005$		10
Signe de $f''(x)$		+	0	−	

3. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère. Montrer, à l'aide de la question 2, que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.

On vient de montrer lors de la question (A.2.b) que la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en $x = -\ln 0,005$. De ce fait, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I, d'abscisse $x_I = -\ln 0,005$.

4. En utilisant les résultats de la question 2, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

On a montré lors de la question (A.2.b) que la dérivée seconde de f s'annule en changeant en $x = -\ln 0,005$, et est positive sur $[0\,;\,-\ln 0,005]$ et négative sur $[-\ln 0,005\,;\,10]$. De ce fait, la fonction f est concave sur l'intervalle $[-\ln 0,005\,;\,10]$.

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est *convexe* (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est *au-dessus* (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes;
- f est *convexe* (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est *croissante* (resp. *décroissante*) sur I.

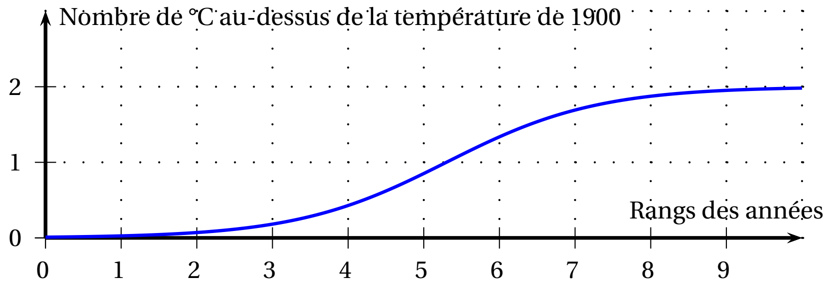
Proposition 2 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est *convexe* si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles .
f est *concave* si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles .

Partie B

Dans toute cette partie les températures seront exprimées en degrés Celsius, notés °C

La COP21, conférence sur les changements climatiques des Nations Unies, a adopté le 12 décembre 2015 le premier accord universel sur le climat, appelé accord de Paris, signé par 195 pays. Cet accord confirme l'objectif, d'ici l'année 2100, que la température terrestre ne dépasse pas de plus de 2°C la température de l'année 1900. Dans cette partie, on modélise, par la fonction f de la partie A, une évolution de température possible permettant d'atteindre l'objectif de l'accord de Paris. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction est tracée ci-dessous, et I est son point d'inflexion. Sur l'axe des abscisses, l'année 1900 correspond à 0 et une unité représente 25 ans, donc l'année 1925 correspond à 1. Sur l'axe des ordonnées, on a représenté le nombre de degrés Celsius au-dessus de la température de 1900.



1.

1. a. Calculer $f(10)$, en arrondissant le résultat au centième.

$$f(10) = \frac{1}{0,5 + e^{-10}} \approx 1,98$$

1. b. En déduire qu'en 2150, avec ce modèle, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté.

Sur l'axe des abscisses, l'année 1900 correspond à 0 et une unité représente 25 ans, donc l'année 2150 correspond à :

$$\frac{2150 - 1900}{25} = \frac{250}{25} = 10$$

On vient de calculer l'image de 10 par f arrondie au centième, $f(10) \approx 1,98$. Donc en 2150, avec ce modèle, l'objectif de l'accord de Paris que d'ici l'année 2100, la température terrestre ne dépasse pas de plus de 2°C la température de l'année 1900 sera respecté.

2.

2. a. En utilisant la partie A, déterminer l'année correspondant à l'abscisse du point I d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. Arrondir le résultat à l'unité.

L'abscisse du point I d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$ est $x_I = -\ln 0,005 \approx 5,30$. Or sur l'axe des abscisses, l'année 1900 correspond à 0 et une unité représente 25 ans, donc l'abscisse $x_I = -\ln 0,005 \approx 5,30$ correspond à l'année (arrondie à l'unité) :

$$1900 + (-\ln 0,005) \times 25 \approx \underline{2032}$$

2. b. Calculer, pour cette année-là, le nombre de degrés Celsius supplémentaires par rapport à 1900.

Pour l'année 2032, le nombre de degrés Celsius supplémentaires par rapport à 1900 est $\underline{f(-\ln(0,005)) = 1°}$ car :

$$\begin{aligned} f(-\ln(0,005)) &= \frac{1}{0,5+100\,\mathrm{e}^{\ln(0,005)}} \\ &= \frac{1}{0,5+100\times 0,005} = 1 \end{aligned}$$

3. On appelle vitesse du réchauffement climatique la vitesse d'augmentation du nombre de degrés Celsius. On admet que, à partir de 1900, la vitesse du réchauffement climatique est modélisée par la fonction f'.

3. a. Est-il vrai de dire qu'après 2033 la température terrestre diminuera ? Justifier la réponse.

Lors de la question (A.1.) on a montré que pour tout rée x de $[0\,;\,10]$:

$$f'(x) = \frac{100\mathrm{e}^{-x}}{(0,5+100\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,10]$.

x	0		10
Signe de $f'(x)$		+	
Variations de f	≈ 0.0099	$\nearrow$	≈ 1.98

Avec :

$$\begin{cases} f(0) \approx 0,0099 \\ f(10) \approx 1,98 \end{cases}$$

La fonction f étant strictement croissante sur l'intervalle $[0; 10]$. La température terrestre augmentera donc continuellement. Par conséquent l'affirmation est fausse, près 2033 la température terrestre va continuer à augmenter (mais moins vite comme on le verra ensuite).

3. b. Est-il vrai de dire qu'après 2033 la vitesse du réchauffement climatique diminuera ? Justifier la réponse.

L'étude du signe de la dérivée seconde f'' réalisé lors de la question (A.2) permet d'établir les variations de la dérivée f' (puisque f'' est la dérivée de f'), on obtient :

x	0		$-\ln 0.005$		10
Signe de $f''(x)$		+	0	−	
Variations de f'	≈ 0.0099	$\nearrow$	0.5	$\searrow$	0.018

$$\begin{cases} f'(0) \approx 0,0099 \\ f'(-\ln 0,005) \approx 0,5 \\ f'(10) \approx 0,018 \end{cases}$$

La fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-\ln 0,005; 10]$. Or l'abscisse $x_I = -\ln 0,005$ du point I est associée à l'année 2032. La vitesse du réchauffement climatique diminuera donc après 2033.

4. Pour sauvegarder les îles menacées par la montée des eaux, la température terrestre ne doit pas dépasser de plus de 1,5°C la température de l'année 1900. Déterminer l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra ce seuil, selon ce modèle.

x	0	α	10
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de f	≈ 0.0099	1.5	≈ 1.98

Théorème 3 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- **Application du corollaire sur $[0;10]$** :
  - La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[0;10]$;
  - Le réel $k = 1.5$ est compris entre $f(0) \approx 0,0099$ et $f(10) \approx 1,98$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x) = 1.5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;10]$.
- **Valeur approchée** .
  Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcr} f(6,39) & \approx & 1,497 < 1,5 \\ f(6,40) & \approx & 1,5012 > 1,5 \end{array}\right| \text{, donc } \underline{6,39 < \alpha < 6,40}.$$

- **Conclusion** .
  Sur l'axe des abscisses, l'année 1900 correspond à 0 et une unité représente 25 ans, donc les abscisses $x_1 = 6,39$ et $x_2 = 6,40$ correspondent à l'année :

$$\begin{cases} 1900 + (6,39) \times 25 \approx \underline{2059,75} \\ 1900 + (6,40) \times 25 \approx \underline{2060} \end{cases}$$

  C'est donc au <u>cours de l'année 2059 ou à partir de l'année 2060</u>, que la température terrestre atteindra le seuil critique, selon ce modèle.

Fin du devoir