Math93.com

Baccalauréat 2018 - ES/L Correction Pondichéry

Série ES/L Obli. et Spé.

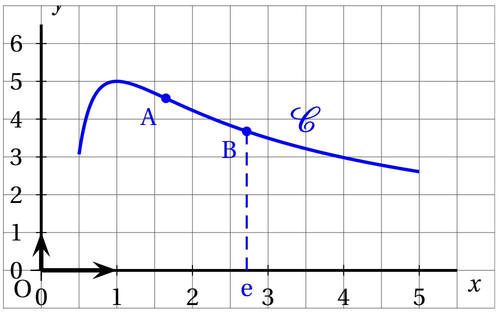
4 Mai 2018

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. QCM — 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5; 5] par : $f(x) = \dfrac{5+5\ln x}{x}$. Sa représentation graphique est la courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous dans un repère d'origine O. On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle [0,5; 5]. On note B le point de cette courbe d'abscisse e. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.



On admet que pour tout x de l'intervalle [0,5; 5] on a : $f'(x) = \dfrac{-5\ln x}{x^2}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{10\ln x - 5}{x^3}$.

Question 1 (Réponse b)

La fonction f' est :

(a.) positive ou nulle sur [0,5; 5] $\quad$ $\boxed{\textbf{(b.)}\ \text{négative ou nulle sur } [1\,;\,5]}$ $\quad$ **(c.)** négative ou nulle sur [0,5; 1]

Preuve.
La dérivée s'exprime comme un quotient dont le dénominateur, x^2 est strictement positif sur [0,5; 5], son signe dépend donc de celui du numérateur $(-\ln x)$. Or on a

$$\begin{cases} -\ln x = 0 \iff x = 1 \\ -\ln x > 0 \iff \ln x < 0 \iff x < 1 \ \text{ et } \ x \in [0,5\,;\,5] \end{cases}$$

De ce fait, sur [0,5; 5]

x	0.5		1		5
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f		↗		↘	

La fonction f' est négative ou nulle sur l'intervalle [1; 5]. La bonne réponse est la <u>réponse b</u>.

Question 2 (Réponse a)

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est égal à :

$\boxed{\textbf{a. } -\dfrac{5}{\mathrm{e}^2}}$ **b.** $\dfrac{10}{\mathrm{e}}$ **c.** $\dfrac{5}{\mathrm{e}^3}$

Preuve.
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est égal à :

$$f'(\mathrm{e}) = \frac{-5\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}^2} = \frac{-5}{\mathrm{e}^2}$$

La bonne réponse est la <u>réponse a</u>.

Question 3 (Réponse c)

La fonction f' est :
(a.) croissante sur [0,5; 1] **(b.)** décroissante sur [1; 5] $\boxed{\textbf{(c.)}\ \text{croissante sur } [2;5]}$

Preuve.
Pour x réel de [0,5; 5] on a $f''(x) = \dfrac{10\ln x - 5}{x^3}$. La dérivée seconde s'exprime comme un quotient dont le dénominateur, x^3 est strictement positif sur [0,5; 5], son signe dépend donc de celui du numérateur $(10\ln x - 5)$. Or on a :

$$\begin{cases} 10\ln x - 5 = 0 \iff x = \mathrm{e}^{0,5} \approx 1,65 \\ 10\ln x - 5 > 0 \iff x > \mathrm{e}^{0,5} \text{ et } x \in [0,5\,;\,5] \end{cases}$$

De ce fait, sur [0,5; 5]

x	0.5		$\mathrm{e}^{0,5} \approx 1.65$		5
Signe de $f''(x)$		−	0	+	
Variations de f'		↘		↗	

La fonction f' est donc croissante sur [2; 5]. La bonne réponse est la <u>réponse c</u>.

Question 4 (Réponse c)

La valeur exacte de l'abscisse du point A de la courbe $\mathscr{C}$ est égale à :

a. 1,65 **b.** 1,6 $\boxed{\textbf{c. } \text{e}^{0,5}}$

Preuve.
On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0,5 ; 5]$. Donc l'abscisse du point A est solution de l'équation $f''(x) = 0$ sur l'intervalle $[0,5 ; 5]$.
On a vu que :

$$f''(x) = 0 \iff x = \text{e}^{0.5}$$

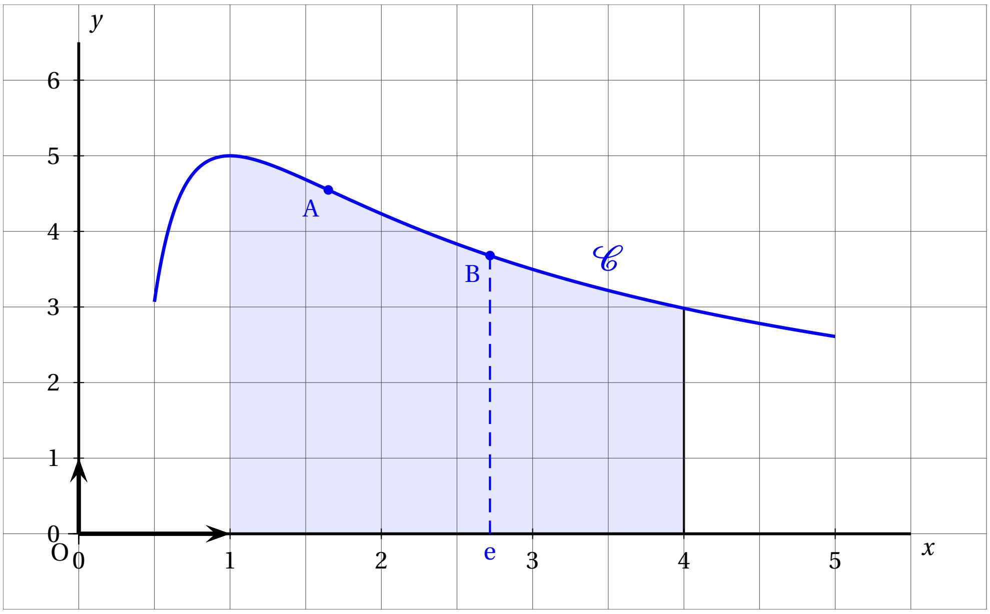
La bonne réponse est la réponse c.

Question 5 (Réponse b)

On note $\mathscr{A}$ l'aire, mesurée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$. Cette aire vérifie :

a. $20 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 30$ $\boxed{\textbf{b. } 10 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 15}$ **c.** $5 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8$

Preuve.
Le domaine contient 20 carrés d'aire 0,5 u.a donc $\mathscr{A} \geq 10$. De plus il est contenu dans un rectangle de taille $3 \times 5 = 15$ u.a. Par conséquent $\mathscr{A} \leq 15$. La bonne réponse est la réponse b.



Exercice 2. Probabilités 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s
Les résultats numériques seront donnés, si nécessaire, sous forme approchée à $0,01$ *près.*

Partie A

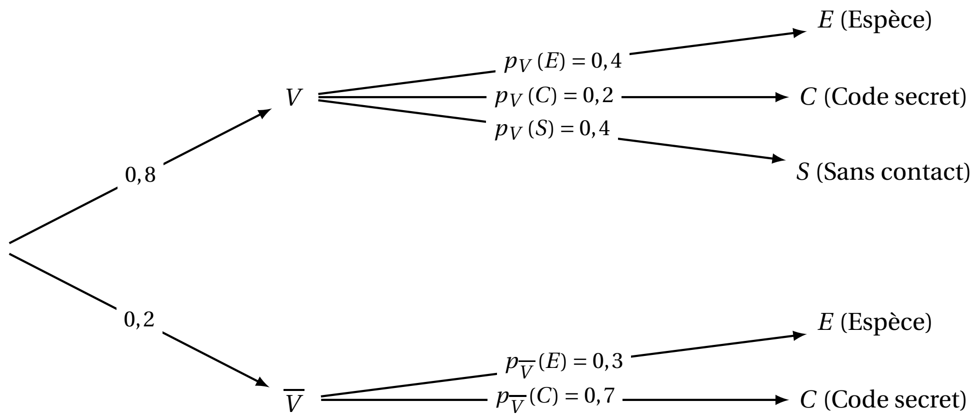
Un commerçant dispose dans sa boutique d'un terminal qui permet à ses clients, s'ils souhaitent régler leurs achats par carte bancaire, d'utiliser celle-ci en mode sans contact (quand le montant de la transaction est inférieur ou égal à 30 €) ou bien en mode code secret (quel que soit le montant de la transaction). Il remarque que : 80 % de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €. Parmi eux : 40 % paient en espèces ; 40 % paient avec une carte bancaire en mode sans contact ; les autres paient avec une carte bancaire en mode code secret. 20 % de ses clients règlent des sommes strictement supérieures à 30 €. Parmi eux : 70 % paient avec une carte bancaire en mode code secret ; les autres paient en espèces.
On interroge au hasard un client qui vient de régler un achat dans la boutique. On considère les évènements suivants :
- *V : « pour son achat, le client a réglé un montant inférieur ou égal à 30 € » ;*
- *E : « pour son achat, le client a réglé en espèces » ;*
- *C : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode code secret » ;*
- *S : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode sans contact ».*

1.

1. a. Donner la probabilité de l'évènement V, notée $P(V)$, ainsi que la probabilité de S sachant V notée $P_V(S)$.

- $\underline{P(V) = 0,8}$ car : « 80 % *de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €* ».
- et $\underline{P_V(S) = 0,4}$ car : « *Parmi les clients qui règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €, 40 % paient avec une carte bancaire en mode sans contact* » .

1. b. Traduire la situation de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.



2.

2. a. Calculer la probabilité que pour son achat, le client ait réglé un montant inférieur ou égal à 30 € et qu'il ait utilisé sa carte bancaire en mode sans contact.
La probabilité cherchée est $p(V \cap S)$. Or on a :

$$p(V \cap S) = p(V) \times p_V(S) = 0,8 \times 0,4 = \underline{0,32}$$

2. b. Montrer que la probabilité de l'évènement : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en utilisant l'un des deux modes » est égale à 0,62.
L'évènement « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en utilisant l'un des deux modes » revient à l'évènement « pour son achat, le client n'a pas payé en espèce » soit à $\overline{E}$. On va donc calculer $P(E)$ puis passer par l'évènement contraire.

Les évènements V et $\overline{V}$ formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(E \cap V) + P\left(E \cap \overline{V}\right)$$
$$P(E) = P(V) \times P_V(E) + P\left(\overline{V}\right) \times P_{\overline{V}}(E)$$
$$P(E) = 0{,}8 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}3$$
$$P(E) = 0{,}32 + 0{,}06$$
$$P(E) = \underline{0{,}38}$$

On a donc la probabilité cherché :

$$p\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = \underline{0,62}$$

.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la dépense en euros d'un client suite à un achat chez ce commerçant. On admet que X suit la loi normale de moyenne $27{,}5$ et d'écart-type 3. On interroge au hasard un client qui vient d'effectuer un achat dans la boutique.

1. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé moins de 30 €.

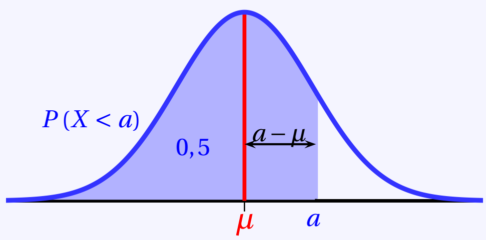
Propriété 1 $(P(X < a)\ ;\ a > \mu)$

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0{,}5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout rée a avec $a > \mu$:

$$\boxed{P(X < a) = 0{,}5 + P\left(\mu < X < a\right)}$$



On a donc d'après la propriété :

$$P(X \leq 30) = 0{,}5 + P(27{,}5 \leq X \leq 30)$$

La calculatrice donne alors le résultat. De ce fait, la probabilité que ce client ait dépensé moins de 30 € est, arrondie au centième :

$$P(X \leq 30) \approx \underline{0{,}8}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 :* $\left(0{,}5+\ \textit{TIStat.normFDR}(27.5\ ,\ 30\ ,\ 27.5\ ,\ 3)\ \right) \approx \underline{0{,}797\,672}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(27.5\ ,\ 30\ ,\ 27.5\ ,\ 3)$ *ou (fr.) normalfrép*$(27.5\ ,\ 30\ ,\ 27.5\ ,\ 3)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(27.5\ ,\ 30,\ 3\ ,\ 27.5\ )$

2. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé entre 24,50 € et 30,50 €.

- Méthode 1.
La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 27.5$ et d'écart-type $\sigma = 3$. La calculatrice donne à 10^{-2} près :

$$X \sim \mathcal{N}\left(27.5\ ;\ 3^2\right) \Longrightarrow P(24.5 < X < 30.5) \approx \underline{0{,}68}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(24.5\ ,\ 30.5\ ,\ 27.5\ ,\ 3) \approx \underline{0{,}682\,689}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(24.5\ ,\ 30.5\ ,\ 27.5\ ,\ 3)$ *ou (fr.) normalfrép*$(24.5\ ,\ 30.5\ ,\ 27.5\ ,\ 3)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(24.5\ ,\ 30.5,\ 3\ ,\ 27.5\ )$

- Méthode 2.

Propriété 2 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$\begin{aligned} P\left(\mu-\ \ \sigma \leq X \leq \mu+\ \ \sigma\right) &\approx 0,683 \quad : (1)\\ P\left(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma\right) &\approx 0,954 \quad : (2)\\ P\left(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma\right) &\approx 0,997 \quad : (3) \end{aligned}$$

Or ici on a :

$$P(24,5 \leq X \leq 30,5) = P(27,5-3 \leq X \leq 27,5+3) = P\left(\mu-\ \ \sigma \leq X \leq \mu+\ \ \sigma\right) \approx 0,68$$

Partie C

Une enquête de satisfaction a été réalisée auprès d'un échantillon de 200 clients de cette boutique. Parmi eux, 175 trouvent que le dispositif sans contact du terminal est pratique. Déterminer, avec un niveau de confiance de 0,95, l'intervalle de confiance de la proportion p de clients qui trouvent que le dispositif sans contact est pratique.

- **Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de $n = 200$ clients. Il est constaté que 175 sont satisfaits.* ». Donc la fréquence observée de clients satisfaits est

$$f = 175 \div 200 = 0{,}875 \text{ soit } f \approx \underline{0{,}88}$$

- **Intervalle de confiance** :
On a pour le cas étudié, $n = 200$, $f = 0{,}875$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\left\{\begin{array}{ll} \checkmark & n = 200 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 200 \times \dfrac{175}{200} = 175 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 200 \times \dfrac{25}{200} = 25 \geq 5 \end{array}\right.$$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est alors :

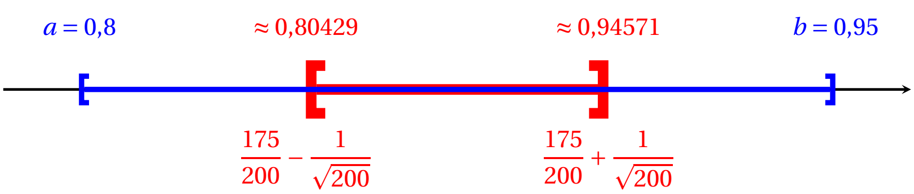
$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{175}{200} - \frac{1}{\sqrt{200}}\,;\, \frac{175}{200} + \frac{1}{\sqrt{200}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{175}{200} - \dfrac{1}{\sqrt{200}} \approx 0{,}80429$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-2} près soit $\underline{0{,}8}$.
- $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{175}{200} + \dfrac{1}{\sqrt{200}} \approx 0{,}94571$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-2} près soit $\underline{0{,}95}$.

$$\boxed{I_{200} \approx [0{,}8\ ;\ 0{,}95]}$$

- **Conclusion**
Cet intervalle contient la proportion p des clients satisfaits , au niveau de confiance 95% (ou au risque d'erreur de 5%). La proportion des clients satisfaits se situe donc, au niveau de confiance 95%, entre 80% et 95%.



©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Obligatoire : Suites — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,8u_n + 18$.

1. Calculer u_1 et u_2.

n	0	1	2
u_n	65	$u_1 = 0,8 \times 65 + 18 = 70$	$u_2 = 0,8 \times 70 + 18 = 74$

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.

2. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8. On précisera la valeur de v_0.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 65 \\ u_{n+1} & = 0,8 \times u_n + 18 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - -90 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 90 \\
v_{n+1} &= (0,8\, u_n + 18) - 90 \\
v_{n+1} &= 0,8 \times u_n - 72 \\
v_{n+1} &= 0,8 \times \left(u_n + \frac{-72}{0,8}\right) \\
v_{n+1} &= 0,8 \times (u_n - 90) \\
v_{n+1} &= 0,8 \times v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,8$, et de premier terme $v_0 = -25$ puisque :

$$\begin{aligned}
v_0 &= u_0 - 90 \\
v_0 &= 65 - 90 \\
v_0 &= -25
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -25 \\ v_{n+1} & = 0,8 \times v_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$, et de premier terme $v_0 = -25$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; \; v_n = -25 \times (0,8)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 90$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 90$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; \; u_n = -25 \times (0,8)^n + 90}$$

©ISSN 2272-5318

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	$u \leftarrow 65$
ligne 2	$n \leftarrow 0$
ligne 3	Tant que ....
ligne 4	$\quad n \leftarrow n+1$
ligne 5	$\quad u \leftarrow 0,8 \times u + 18$
ligne 6	Fin Tant que

3. a. Recopier et compléter la L3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 85$.

$\boxed{\text{Tant que } u < 85}$.

3. b. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	65.000	70.000	74.000	77.200	79.760	81.808	83.446	84.757	85.806

En utilisant la calculatrice on obtient que la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme est $\underline{n = 8}$.

3. c. Retrouver par le calcul le résultat de la question précédente en résolvant l'inéquation $u_n \geqslant 85$.

$$\begin{aligned} u_n \geq 85 &\iff 90 - 25 \times 0,8^n \geq 85 \\ &\iff -25 \times 0,8^n \geq -5 \\ &\iff 0,8^n \leq \frac{-5}{-25} = 0,2 \end{aligned}$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\begin{aligned} u_n \geq 85 &\iff \ln 0,8^n \leq \ln 0,2 \\ &\iff n \ln 0,8 \leq \ln 0,2 \end{aligned}$$

On divise alors les deux membres par ln 0,2 qui est négatif

$$u_n \geq 85 \iff n \geq \frac{\ln 0,2}{\ln 0,8} \approx 7,21$$

Puisque n est un entier naturel, les solutions de l'inéquation sont <u>les entiers supérieurs ou égaux à 8</u>. On retrouve bien le résultat précédent.

4. *La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de* 52 € *par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio. En juillet 2017,* 65 *particuliers ont souscrit cet abonnement. Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :• d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;• chaque mois,* 18 *particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.*

4. a. Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

- Au mois de juillet, 65 particuliers ont souscrit à l'abonnement donc $u_0 = 65$.
- D'un mois sur l'autre, environ 20% des abonnements sont résiliés et 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.
  Donc le nombre d'abonnés au panier bio le $n+1$-ième mois qui suit le mois de juillet 2017, s'obtient en conservant 80% des u_n abonnés du mois précédent et en en ajoutant 18 soit :

  $$u_{n+1} = 0,8u_n + 18$$

- Conclusion : la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

4. b. Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018? Justifier la réponse.

On cherche à savoir si la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018. Puisque Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois et que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017, la recette mensuelle est de :

$$52 \times u_n$$

On cherche donc à résoudre, pour n entier entre 6 et 17 (de janvier 2018 pour $n = 6$, à décembre 2018 pour $n = 17$) l'inéquation :

$$52 \times u_n \geq 4\,420 \text{ €} \iff u_n \geq \frac{4\,420}{52} = 85$$

On reprend alors le résultat obtenu lors de la question (3.)

$$u_n \geq 85 \iff n \geq 8$$

Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va dépasser 4 420 € en <u>mars 2018</u> (pour $n = 8$).

4. c. Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette? Argumenter la réponse.

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Ici $-1 < q = 0,8 < 1$ et d'après le théorème 1 on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,8)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} -25 \times (0,8)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \Big(\underbrace{-25 \times (0,8)^n + 90}_{u_n}\Big) = 90$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 90}$$

À partir d'un certain nombre de mois, le nombre d'abonnés sera chaque mois proche de 90 ce qui correspond à une recette :

$$90 \times 52\text{€} = 4680\text{€}$$

La recette mensuelle de la société Biocagette tend vers <u>4680 euros</u>.

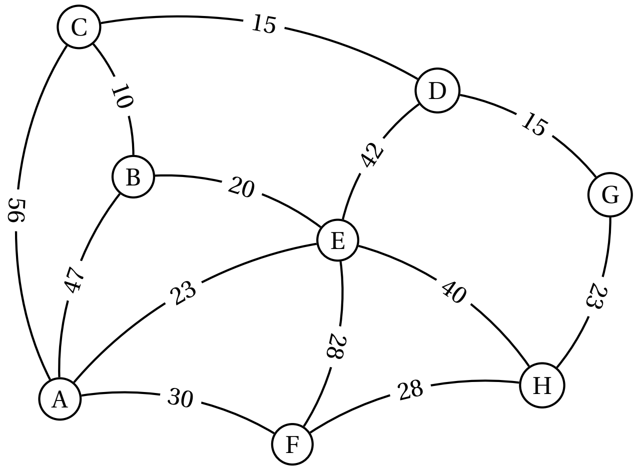
 ©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Spécialité : graphes — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les différents lieux A, B, C, D, E, F, G et H dans lesquels Louis est susceptible de se rendre chaque jour. Le lieu A désigne son domicile et G le lieu de son site de travail. Le poids de chaque arête représente la distance, en kilomètres, entre les deux lieux reliés par l'arête.



Déterminer le chemin le plus court qui permet à Louis de relier son domicile à son travail. On pourra utiliser un algorithme. Préciser la distance, en kilomètres, de ce chemin.
Pour déterminer le trajet le plus rapide pour aller de A à G, on utilise l'algorithme de Dijkstra.
Remarque : L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.

de ... à	B	C	D	E	F	G	H
A	47A	56A		**23A**	30A		
E23	43E	56A	65E		**30A**		65E
F30	**43E**	56A	65E				58F
B43		**53B**	65E				58F
C53			65E				**58F**
H58			**65E**			81H	
D65						**80D**	

Le chemin le plus court pour relier A à G est donc de longueur 80 km :

$$\boxed{A \xrightarrow{23} E \xrightarrow{42} D \xrightarrow{15} G}$$

Partie B

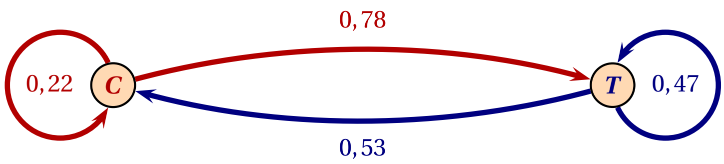
Afin de réduire son empreinte énergétique, Louis décide d'utiliser lors de ses trajets quotidiens soit les transports en commun, soit le covoiturage. • s'il a utilisé les transports en commun lors d'un trajet, il utilisera le covoiturage lors de son prochain déplacement avec une probabilité de $0,53$ *; • s'il a utilisé le covoiturage lors d'un trajet, il effectuera le prochain déplacement en transport en commun avec une probabilité de* $0,78$*. Louis décide de mettre en place ces résolutions au 1er janvier 2018. Pour tout entier naturel* n*, on note : •* c_n *la probabilité que Louis utilise le covoiturage* n *jour(s) après le 1er janvier 2018; •* t_n *la probabilité que Louis utilise les transports en commun* n *jour(s) après le 1er janvier 2018;La matrice ligne* $P_n = (c_n \quad t_n)$ *traduit l'état probabiliste* n *jour(s) après le 1er janvier 2018. Le 1er janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage.*

1.

1. a. Préciser l'état probabiliste initial P_0.
Puisque le 1er janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage, on a $\underline{P_0 = (c_0 \quad t_0) = (1 \quad 0)}$.

1. b. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste. On notera « C » et « T » ses deux sommets :

- **« C » pour indiquer que Louis utilise le covoiturage;**
- **« T » pour indiquer que Louis utilise les transports en commun.**



2. Déterminer la matrice de transition du graphe probabiliste en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique.
Dans l'exemple 1, la matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1ère ligne : probabilité d'aller de A vers A, de A vers B;
- 2ème ligne : probabilité d'aller de B vers A, de B vers B.

On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}}$$

3. Calculer l'état probabiliste P_2 et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
On a :

$$P_2 = P_0 \times M^2 = (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,4618 & 0,5382 \\ 0,3657 & 0,6343 \end{pmatrix} = \underline{(0,4618 \quad 0,5382)}$$

Au bout de 2 jours la probabilité que Louis utilise la covoiturage est de $46,18\%$ et la probabilité qu'il utilise les transports en commun est de $53,82\%$.

4. Soit la matrice ligne $P = (x \quad y)$ associée à l'état stable du graphe probabiliste.

4. a. Calculer les valeurs exactes de x et de y puis en donner une valeur approchée à 0,01 près.

Définition 1 (État stable)

Un état stable d'un graphe probabiliste à deux états, de matrice de transition M est un état $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} P = P \times M \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = P\times M \\ x+y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=1 \\ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y=1 \\ 0,22x+0,53y = x \\ 0,78x+0,47y = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1-y \\ -0,78x+0,53y=0 \\ 0,78x-0,53y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1-y \\ 0,78-0,78y-0,53y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1-y \\ 1,31y=0,78 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1-y \\ y=\dfrac{78}{131} \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{53}{131} \\ y=\dfrac{78}{131} \end{cases}$$

L'état stable est donc :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} \dfrac{53}{131} & \dfrac{78}{131} \end{pmatrix} \approx (0,4 \quad 0,6)}$$

4. b. Selon ce modèle, peut-on dire qu'à long terme, Louis utilisera aussi souvent le covoiturage que les transports en commun ? Justifier la réponse.

Propriété 3 (État stable)

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.
Cet état stable vérifie l'égalité :

$$P = P\times M$$

La matrice de transition M ne comporte pas de 0 donc l'état P_n converge vers un état stable $P \approx (0,4 \quad 0,6)$.
À long terme, la probabilité que Louis utilise le covoiturage est de 40% et celle qu'il utilise les transports en commun est de 60%. Selon ce modèle, on ne peut donc pas dire, qu'à long terme, Louis utilisera aussi souvent le covoiturage que les transports en commun.

Exercice 4. Fonctions — 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Dans cet exercice, si nécessaire, les valeurs numériques approchées seront données à $0,01$ *près. On considère la fonction* f *définie sur l'intervalle [0; 4] par :* $f(x) = (3,6x+2,4)e^{-0,6x} - 1,4$.

Partie A

On admet que la fonction f *est dérivable sur l'intervalle [0; 4] et on note* f' *sa fonction dérivée.*

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle [0; 4] on a : $f'(x) = (-2,16x+2,16)\mathrm{e}^{-0,6x}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} [0\,;\,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = (3,6x+2,4)\times \mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4 \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,4]$.
La fonction f est de la forme $uv - 1,4$ donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,4]\,;\ f(x) = u(x)\times v(x) - 1,4 \ : \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = (3,6x+2,4) & ; & u'(x) = 3,6 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-0,6x} & ; & v'(x) = \left(-0,6\,\mathrm{e}^{-0,6x}\right) \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;\,4],\ f'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) \\ f'(x) &= 3,6\times \mathrm{e}^{-0,6x} + (3,6x+2,4)\times\left(-0,6\,\mathrm{e}^{-0,6x}\right) \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{-0,6x}\times\Big(3,6-2,16x-1,44\Big) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,4]\,;\ f'(x) = (-2,16x+2,16)\mathrm{e}^{-0,6x}}$$

2.

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0; 4].

La fonction exponentielle est strictement positive sur $[0\,;\,4]$ donc f' est du facteur du premier degré $(-2,16x+2,16)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} -2,16x+2,16 = 0 \iff x = 1 \\ -2,16x+2,16 > 0 \iff x < 1 \ \text{ et } \ x \in [0\,;\,4] \end{array} \right.$$

Donc f' est positive sur $[0; 1]$ et négative sur $[1; 4]$.

2. b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle. On donnera les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variation sous forme approchée.

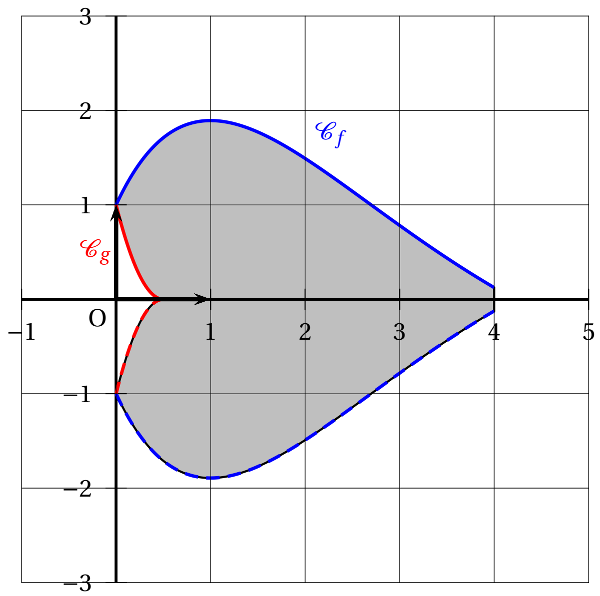
$$f(x) = (3,6x+2,4)\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(1) \approx 1,89 \\ f(4) \approx 0,124 \end{array} \right.$$

x	0		1		4
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	1	↗	$f(1) \approx 1.89$	↘	$f(4) \approx 0.124$

3. **On admet que la fonction F définie par : $F(x) = (-6x-14)\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4x$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ puis en donner une valeur numérique approchée.**

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= F(4)-F(0)\\ &= (-6\times4-14)\mathrm{e}^{-0,6\times4}-1,4\times4-(-6\times0-14)\mathrm{e}^{-0,6\times0}+1,4\times0\\ &= -38\,\mathrm{e}^{-2,4}-5,6+14\\ \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= \underline{-38\,\mathrm{e}^{-2,4}+8,4} \approx \underline{4,95\text{ u.a.}}\end{aligned}$$

Partie B



On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [0; 4]. On considère la fonction g définie par : $g(x) = 4x^2-4x+1$. On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle [0; 0,5]. On a tracé ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère d'origine O et, en pointillés, les courbes obtenues par symétrie de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ par rapport à l'axe des abscisses :

1. **Montrer que $\displaystyle\int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.**

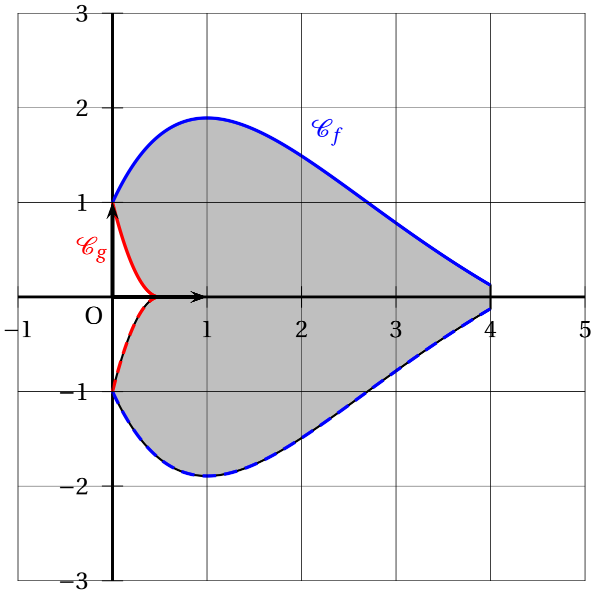
La fonction g est continue sur $[0\,;0,5]$ donc elle y admet des primitive. Pour tout réel de $[0\,;0,5]$, une primitive de g est :

$$G(x) = \frac{4}{3}x^3-2x^2+x$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x &= G(0,5)-G(0)\\ &= \frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\left(\frac{4}{3}\times0^3-2\times0^2+0\right)\\ &= \frac{4}{3}\times\frac{1}{8}-2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ \int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

2. **On considère le domaine plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, leurs courbes symétriques (en pointillés) ainsi que la droite d'équation $x = 4$. Ce domaine apparaît grisé sur la figure ci-dessus. Calculer une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine.**



Les fonctions f et g étant positives sur $[0\,;4]$, l'aire du domaine grisé au dessus de l'axe des abscisses correspond, en unités d'aire, à

$$\int_0^4 f\,\mathrm{d}x - \int_0^{0,5} g\,\mathrm{d}x$$

Par raison de symétrie, l'aire du domaine grisé sera donc le double de celle du domaine précédent :

$$\mathscr{A} = 2 \times \left(\int_0^4 f\,\mathrm{d}x - \int_0^{0,5} g\,\mathrm{d}x\right)$$

D'après les résultat précédents :

$$\mathscr{A} = 2 \times \left(-38\,\mathrm{e}^{-2,4} + 8,4 - \frac{1}{6}\right) \approx \underline{9,57 \text{ u.a.}}$$

Fin du devoir