Math93.com

Baccalauréat 2018 - ES/L
Correction Amérique Nord

Série ES/L Obli. et Spé.

29 Mai 2018

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. QCM — 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Question 1

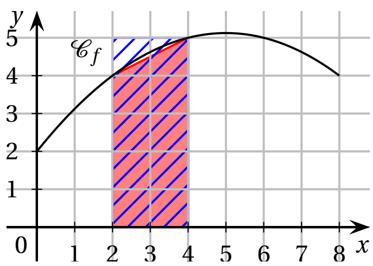
Un pépiniériste cultive des bulbes de fleurs. La probabilité qu'un bulbe germe, c'est-à-dire qu'il donne naissance à une plante qui fleurit, est de $0,85$. Il prélève au hasard 20 bulbes du lot. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 bulbes. On peut affirmer que :

A. La probabilité qu'au maximum 15 bulbes germent est proche de $0,103$.
B. La probabilité qu'au maximum 15 bulbes germent est proche de $0,067$.
C. La probabilité qu'au minimum 15 bulbes germent est proche de $0,830$.
D. La probabilité qu'au minimum 15 bulbes germent est proche de $0,933$.

Réponse D.

La variable aléatoire X qui donne le nombre de bulbes qui germent suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,85$. On obtient à la calculatrice $P(X \geqslant 15) \approx 0,933$.

Question 2



A. $8 \leqslant \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 9$	**B.** $9 \leqslant \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 10$
C. $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = f(4) - f(2)$	**D.** $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$

Réponse B.

$\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ est, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.
Cette aire est encadrée par les deux polygones dessinés dont les aires sont de 9 et 10 (en u.a.).

Question 3

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \ln(x)$.
Une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$ est la fonction G définie par :

A. $G(x) = \ln(x)$	**B.** $G(x) = x\ln(x)$
C. $G(x) = x\ln(x) - x$	**D.** $G(x) = \dfrac{1}{x}$

Réponse C.

Si $G(x) = x\ln(x) - x$, alors

$$G'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) = g(x)$$

donc G est une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Question 4

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x) > 0$ est :

A. $]0\,;\,+\infty[$	**B.** $]0\,;\,1[$
C. $]1\,;\,+\infty[$	**D.** $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$

Réponse C.

$$\ln(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{\ln(x)} > \mathrm{e}^{0} \iff x > 1$$

On compose par la fonction exponentielle qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'ordre est inchangé.

Exercice 2. Probabilités 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Le site internet « ledislight.com » spécialisé dans la vente de matériel lumineux vend deux sortes de rubans LED flexibles : un premier modèle dit d'« intérieur » et un deuxième modèle dit d'« extérieur ». Le site internet dispose d'un grand stock de ces rubans LED.

Partie A

1. **Le fournisseur affirme que, parmi les rubans LED d'extérieur expédiés au site internet, 5 % sont défectueux. Le responsable internet désire vérifier la validité de cette affirmation. Dans son stock, il prélève au hasard 400 rubans LED d'extérieur parmi lesquels 25 sont défectueux. Ce contrôle remet-il en cause l'affirmation du fournisseur?** ***Rappel : lorsque la proportion p d'un caractère dans la population est connue, l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % d'une fréquence d'apparition de ce caractère obtenue sur un échantillon de taille n est donnée par :***

$$\boldsymbol{I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]}$$

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 400$ rubans LED. Il est constaté que 25 d'entre eux sont défectueux. ». Donc la fréquence observée rubans LED défectueux est
  $$f = 25 \div 400 = 0{,}0625 \text{ soit } \underline{f \approx 0{,}063} \text{ ou } 6{,}3\%$$
  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion de rubans LED défectueux est $\underline{p = 5\%}$ ».
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 400$, $p = 5$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 400 \geq 30 \\ \checkmark & np = 400 \times 0{,}05 = 20 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 400 \times 0{,}95 = 380 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}05 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}05 \times 0{,}95}}{\sqrt{400}}\ ;\ 0{,}05 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}05 \times 0{,}95}}{\sqrt{400}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}02864$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}028}$.
- $p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}07136$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}072}$.

$$\boxed{I_{400} \approx [0{,}028\ ;\ 0{,}072]}$$

- **Conclusion**
  La fréquence observée appartient à l'intervalle, $f \approx 0{,}063 \in I$ donc le résultat du contrôle ne remet pas en question l'hypothèse, au seuil de 95%.

2. Le fournisseur n'a donné aucune information concernant la fiabilité des rubans LED d'intérieur. Le directeur du site souhaite estimer la proportion de rubans LED d'intérieur défectueux. Pour cela, il prélève un échantillon aléatoire de 400 rubans d'intérieur, parmi lesquels 38 sont défectueux. Donner un intervalle de confiance de cette proportion au seuil de confiance de 95 %.

- **Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de* $n = 400$ *rubans LED d'intérieur. Il est constaté que* 38 *sont défectueux.* ». Donc la fréquence observée de rubans LED d'intérieur défectueux est

$$f = 38 \div 400 = 0{,}095 \text{ soit } f = \underline{0{,}095} \text{ ou } 9{,}5\%$$

- **Intervalle de confiance** :
  On a pour le cas étudié, $n = 400$, $f = 0{,}095$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 400 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 400 \times \dfrac{38}{400} = 38 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 400 \times \dfrac{362}{400} = 362 \geq 5 \end{cases}$$

  Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est alors :

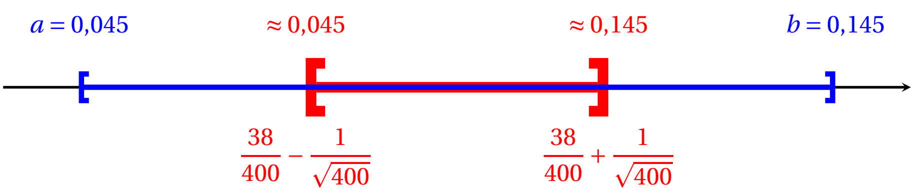
$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{38}{400} - \frac{1}{\sqrt{400}}\ ;\ \frac{38}{400} + \frac{1}{\sqrt{400}}\right]$$

  Soit puisque les borne sont :

  - $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{38}{400} - \dfrac{1}{\sqrt{400}} \approx 0{,}045$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}045}$.
  - $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{38}{400} + \dfrac{1}{\sqrt{400}} \approx 0{,}145$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}145}$.

$$\boxed{I_{400} \approx [0{,}045\ ;\ 0{,}145]}$$

- **Conclusion**
  Cet intervalle contient la proportion p des rubans LED d'intérieur défectueux , au niveau de confiance 95% (ou au risque d'erreur de 5%). La proportion des rubans LED d'intérieur défectueux se situe donc, au niveau de confiance 95%, <u>entre 4.5% et 14.5%</u>.



©ISSN 2272-5318

Partie B

À partir d'une étude statistique réalisée sur de nombreux mois, on peut modéliser le nombre de rubans LED d'intérieur vendus chaque mois par le site à l'aide d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 2\,500$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

1. Quelle est la probabilité que le site internet vende entre 2 100 et 2 900 rubans LED d'intérieur en un mois?

- Méthode 1 : Avec la calculatrice.
La probabilité que le site internet vende entre 2 100 et 2 900 rubans LED d'intérieur en un mois est

$$P(2\,100 \leqslant X \leqslant 2\,900) \approx \underline{0,683}$$

> *Calculatrices*
> - *Sur la TI Voyage 200 :* $\Big($ *TIStat.normFDR*$(2100\ ,\ 2900\ ,\ 2500\ ,\ 400) \Big) \approx \underline{0{,}682\,689\,492\,137\,086}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*(2100 , 2900 , 2500 , 400) *ou (fr.) normalfrép*(2100 , 2900 , 2500 , 400)
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd ⇒ NormCD*(2100 , 2900, 400 , 2500)

- Méthode 2 : C'est un résultat du cours.

Propriété 1 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$\begin{aligned} P\left(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\right) &\approx 0,683 \quad : (1)\\ P\left(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\right) &\approx 0,954 \quad : (2)\\ P\left(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\right) &\approx 0,997 \quad : (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2\,100 \leqslant X \leqslant 2\,900) &= P(2\,500 - 400 \leqslant X \leqslant 2\,500 + 400)\\ &= P\left(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\right) \approx \underline{0,683} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}\sigma = 400\\ \mu = 2\,500\end{cases}\end{aligned}$$

2.

2. a. Trouver, arrondie à l'entier, la valeur de a telle que $P(X \leqslant a) = 0,95$.

On cherche a tel que $P(X \leq a) = 0,95$ où X qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(2500\,;\,400^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-0} près :

$$\boxed{P(X \leq a) = 0,95 \Longleftrightarrow a \approx \underline{3158}}$$

> *Calculatrices*
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0.95\ ,\ 2500\ ,\ 400) \approx \underline{3\,157{,}941\,451}$
> - *Sur TI82/83+ : invNorm*(0.95 , 2500 , 400) *ou (fr.) FracNormale*(0.95 , 2500 , 400)
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN ⇒ InvNormCD*(0.95 , 400 , 2500)

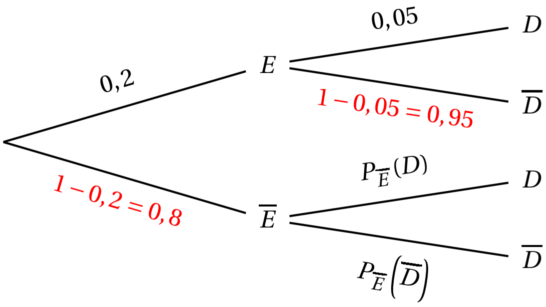
2. b. Interpréter la valeur de a obtenue ci-dessus en termes de probabilité de rupture de stock.

Si le site internet possède en stock 3 158 rubans LED d'intérieur, la probabilité qu'il n'y ait pas rupture de stock est supérieure ou égale à 0,95.

Partie C

On admet maintenant que : 20 % des rubans LED proposés à la vente sont d'extérieur; 5 % des rubans LED d'extérieur sont défectueux. On prélève au hasard un ruban LED dans le stock. On appelle : E l'évènement : « le ruban LED est d'extérieur »; D l'évènement : « le ruban LED est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, que l'on complètera au fur et à mesure.



2. Déterminer la probabilité que le ruban LED soit d'extérieur et défectueux.
L'évènement « Le ruban LED est d'extérieur et défectueux » est l'évènement $E \cap D$, on cherche donc :

$$P(E \cap D) = P(E) \times P_E(D) = 0,2 \times 0,05 = \underline{0,01}$$

3. D'autre part on sait que 6 % de tous les rubans LED sont défectueux. Calculer puis interpréter $P_{\overline{E}}(D)$.

- D'après la formule de Bayes :

$$P_{\overline{E}}(D) = \frac{P\left(\overline{E} \cap D\right)}{P\left(\overline{E}\right)} = \frac{P\left(\overline{E} \cap D\right)}{0,8}$$

- Puisque « 6 % de tous les rubans LED sont défectueux » alors $P(D) = 0,06$.
  Les évènement E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D) = P(E \cap D) + P\left(\overline{E} \cap D\right) &\iff 0,06 = 0,01 + P\left(\overline{E} \cap D\right) \\ &\iff P\left(\overline{E} \cap D\right) = 0,59 \end{aligned}$$

- Donc en remplaçant dans la formule de Bayes :

$$P_{\overline{E}}(D) = \frac{P\left(\overline{E} \cap D\right)}{0,8} = \frac{0,05}{0,8} = \frac{1}{16} = \underline{0,0625}$$

- Conclusion : Cela signifie donc que la probabilité qu'un ruban soit défectueux sachant que c'est un ruban d'intérieur est 0,0625.

Remarque historique

Thomas Bayes (1702−1761) est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

Exercice 3. Obligatoire : Suites — 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité et candidats de L

Une société propose des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Le directeur de cette société remarque que, chaque année, 14 % des contrats supplémentaires sont souscrits et 7 sont résiliés. En 2017, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits.On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n est le nombre de contrats souscrits l'année $2017+n$. Ainsi on a $u_0 = 120$.

1.

1. a. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,14u_n - 7$.

Chaque année, 14 % des contrats supplémentaires sont souscrits ; augmenter de 14 %, c'est multiplier par $1,14$. De plus chaque année, 7 contrats sont résiliés. On passe donc du nombre de contrats de l'année n au nombre de contrats de l'année $n+1$ en multipliant par $1,14$ puis en retranchant 7.

Donc, pour tout entier naturel n, on a $\underline{u_{n+1} = 1,14u_n - 7}$.

1. b. Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2018.

$2018 = 2017 + 1$ donc le nombre de contrats d'entretien en 2018 est u_1 :

$$u_1 = 1,14u_0 - 7 = 1,14 \times 120 - 7 \approx \underline{130}$$

On peut estimer à 130 le nombre de contrats d'entretien en 2018.

2. *Compte tenu de ses capacités structurelles actuelles, l'entreprise ne peut prendre en charge que 190 contrats. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel. On cherche donc à savoir en quelle année l'entreprise devra embaucher.*

2. a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.

```
n ⟵ 0
u ⟵ 120
Tant que u ⩽ 190
        n ⟵ n + 1
        u ⟵ u × 1,14 − 7
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
```

2. b. Quelle est l'année affichée en sortie d'algorithme? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On utilise la calculatrice pour déterminer les différentes valeurs de u_n (arrondies à l'unité) :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	120	130	141	154	168	185	204

C'est donc à partir de $n = 6$ que u dépasse 190 ; l'année $2017+6 = 2023$ sera donc affichée en fin d'algorithme ; c'est l'année à partir de laquelle l'entreprise aura plus de 190 contrats en charge donc devra embaucher.

3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 50$ pour tout entier naturel n ; donc $u_n = v_n + 50$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 120 \\ u_{n+1} & = 1,14 \times u_n - 7 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 50 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 50 \\
v_{n+1} &= (1,14\ u_n - 7) - 50 \\
v_{n+1} &= 1,14 \times u_n - 57 \\
v_{n+1} &= 1,14 \times \left(u_n + \frac{-57}{1,14}\right) \\
v_{n+1} &= 1,14 \times (u_n - 50) \\
v_{n+1} &= 1,14 \times v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}14$, et de premier terme $v_0 = 70$ puisque :

$$v_0 = u_0 - 50$$
$$v_0 = 120 - 50$$
$$v_0 = 70$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 70 \\ v_{n+1} & = 1{,}14 \times v_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. a. Exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 70 \times 1{,}14^n + 50$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}14$, et de premier terme $v_0 = 70$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \, ; \; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \, ; \; v_n = 70 \times (1{,}14)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 50$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 50$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \, ; \; u_n = 70 \times (1{,}14)^n + 50}$$

3. b. Résoudre l'inéquation $u_n > 190$. Quel résultat de la question 2. retrouve-t-on ?

$$\begin{aligned} u_n > 190 & \iff 70 \times 1{,}14^n + 50 > 190 & \\ & \iff 70 \times 1{,}14^n > 140 & \\ & \iff 1{,}14^n > 2 & \\ & \iff \ln(1{,}14^n) > \ln(2) & \text{car la fonction ln est croissante sur }]0\,;+\infty[\\ & \iff n \ln(1{,}14) > \ln(2) & \text{propriété de la fonction ln} \\ & \iff n > \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}14)} & \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\ln(2)}{\ln(1{,}14)} \approx 5{,}3$$

donc puisque n est un entier naturel on a :

$$\underline{u_n > 190 \iff n \geqslant 6}.$$

Interprétation : On retrouve donc l'année $2017 + 6 = 2023$ à partir de laquelle le nombre de contrats d'entretien sera supérieur à 190.

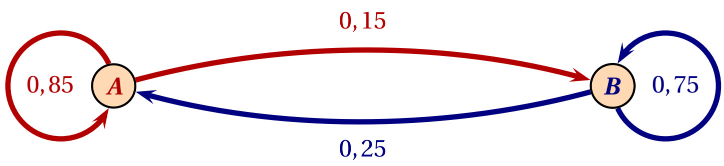
Exercice 4. Spécialité — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Deux entreprises concurrentes « Alphacopy » et « Bêtacopy » proposent des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Ces deux entreprises se partagent le marché des contrats d'entretien sur un secteur donné. Le patron de Alphacopy remarque que, chaque année : 15 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Alphacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Bêtacopy. Les autres restent fidèles à Alphacopy; 25 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Bêtacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Alphacopy. Les autres restent fidèles à Bêtacopy. On définit les évènements suivants : A : « le client est sous contrat avec l'entreprise Alphacopy » ; B : « le client est sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy ». À partir de 2017, on choisit au hasard un client ayant un contrat d'entretien de photocopieurs et on note, pour tout entier naturel n : a_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy l'année $2017+n$; b_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy l'année $2017+n$ On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2017+n$. L'objectif de l'entreprise Alphacopy est d'obtenir au moins 62 % des contrats d'entretien des photocopieurs.

Partie A

1. **Représenter le graphe probabiliste de cette situation et donner la matrice de transition M associée à ce graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique.**



La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1ère ligne : probabilité d'aller de A vers A, de A vers B ;
- 2ème ligne : probabilité d'aller de B vers A, de B vers B.

On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}}$$

2. **Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \end{pmatrix}$ est l'état stable.**

Définition 1 (État stable)

Un état stable d'un graphe probabiliste à deux états, de matrice de transition M est un état $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} P = P \times M \\ a+b=1 \end{cases}$$

Soit $P = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \end{pmatrix}$.

- $0,625+0,375=1$ donc P est un état du système.
- $P \times M = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0,625 \times 0,85 + 0,375 \times 0,25 & 0,625 \times 0,15 + 0,375 \times 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \end{pmatrix}$$

Donc $P = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \end{pmatrix}$ est un état stable du système.

©ISSN 2272-5318

3. À votre avis, l'entreprise Alphacopy peut-elle espérer atteindre son objectif?

Propriété 2 (État stable)

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.
Cet état stable vérifie l'égalité :

$$P = P \times M$$

La matrice de transition ne présentant pas de zéro, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.
On a ici :

$$P = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \end{pmatrix}$$

Donc la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy va tendre vers $0,625$ soit $62,5\,\%$. L'entreprise Alphacopy va donc dépasser à un moment donné le seuil des $62\,\%$ et ainsi atteindre son objectif.

Partie B

En 2017, on sait que 46 % des clients ayant un contrat d'entretien de photocopieurs étaient sous contrat avec l'entreprise Alphacopy. On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,54 \end{pmatrix}$.

1. On rappelle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n$ puis que : $a_{n+1} = 0,60a_n + 0,25$.
On a d'après la définition de la matrice de transition, pour tout n,

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n \times M &\iff P_{n+1} = P_n \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 0,85\,a_n + 0,25\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0,15\,a_n + 0,75\,b_n \end{array} \right. \end{aligned}$$

Or on sait que pour tout entier n on a : $a_n + b_n = 1$ donc

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,85\,a_n + 0,25\,b_n \\ a_n + b_n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{n+1} = 0,85\,a_n + 0,25\,b_n \\ b_n = 1 - a_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25\,(1 - a_n) &\iff a_{n+1} = 0,85c_n + 0,25 - 0,25\,a_n \\ &\iff \underline{a_{n+1} = 0,60\,a_n + 0,25} \end{aligned}$$

2. *On cherche à déterminer à l'aide d'un algorithme en quelle année l'entreprise Alphacopy atteindra son objectif.*

2. a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.

```
n ← 0
a ← 0,46
Tant que a < 0,62
        n ← n + 1
        a ← 0,6 × a + 0,25
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
```

2. b. Quelle est l'année en sortie de l'algorithme? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On utilise la calculatrice pour déterminer les différentes valeurs de u_n (arrondies à 10^{-3}) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	0,46	0,526	0,566	0,589	0,604	0,612	0,617	0,620

La valeur de n pour laquelle u dépasse 0,62 est 7 donc c'est l'année $2017+7=2024$ qui s'affiche en sortie d'algorithme.

La société Alphacopy atteindra son objectif la première fois en 2024.

3. *On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0,625$ pour tout entier naturel n ; donc $a_n = u_n + 0,625$.*

3. a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.

Les suites (a_n) et (u_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 &= 0,46 \\ a_{n+1} &= 0,6 \times a_n + 0,25 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (u_n) : \begin{cases} u_0 & \\ u_n &= a_n - 0,625 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,625 \\ u_{n+1} &= (0,6\, a_n + 0,25) - 0,625 \\ u_{n+1} &= 0,6 \times a_n - 0,375 \\ u_{n+1} &= 0,6 \times \left(a_n + \frac{-0,375}{0,6} \right) \\ u_{n+1} &= 0,6 \times (a_n - 0,625) \\ u_{n+1} &= 0,6 \times u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une <u>suite géométrique</u> de raison $q = 0,6$, et de premier terme $u_0 = -0,165$ puisque :

$$\begin{aligned} u_0 &= a_0 - 0,625 \\ u_0 &= 0,46 - 0,625 \\ u_0 &= -0,165 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_0 &= -0,165 \\ u_{n+1} &= 0,6 \times u_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. Exprimer u_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier n, $a_n = -0,165 \times 0,60^n + 0,625$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,6$, et de premier terme $u_0 = -0,165$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \; u_n = u_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; \; u_n = -0,165 \times (0,6)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$u_n = a_n - 0,625$$

On peut en déduire l'expression :

$$a_n = u_n + 0,625$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; \; a_n = -0,165 \times (0,6)^n + 0,625}$$

3. c. Résoudre l'inéquation $a_n \geqslant 0,62$. Quel résultat de la question 2. retrouve-t-on ?

$$\begin{array}{rcll}
a_n \geqslant 0,62 & \iff & -0,165\times 0,60^n + 0,625 \geqslant 0,62 & \\
& \iff & 0,005 \geqslant 0,165\times 0,60^n & \\
& \iff & \dfrac{0,005}{0,165} \geqslant 0,60^n & \\
& \iff & \ln\left(\dfrac{0,005}{0,165}\right) \geqslant \ln\left(0,60^n\right) & \text{la fonction ln est croissante sur }]0\,;\,+\infty[\\
& \iff & \ln\left(\dfrac{0,005}{0,165}\right) \geqslant n\ln\left(0,60\right) & \text{propriété de la fonction ln} \\
a_n \geqslant 0,62 & \iff & \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,005}{0,165}\right)}{\ln(0,60)} \leqslant n & \text{car } \ln(0,60) < 0
\end{array}$$

Or

$$\frac{\ln\left(\dfrac{0,005}{0,165}\right)}{\ln(0,60)} \approx 6,85$$

Donc puisque n est un entier naturel on a :

$$a_n \geqslant 0,62 \iff \underline{n \geqslant 7}$$

Interprétation : On retrouve donc l'année 2017 + 7 = 2024 à partir de laquelle l'entreprise Alphacopy aura atteint plus de 62 % du marché..

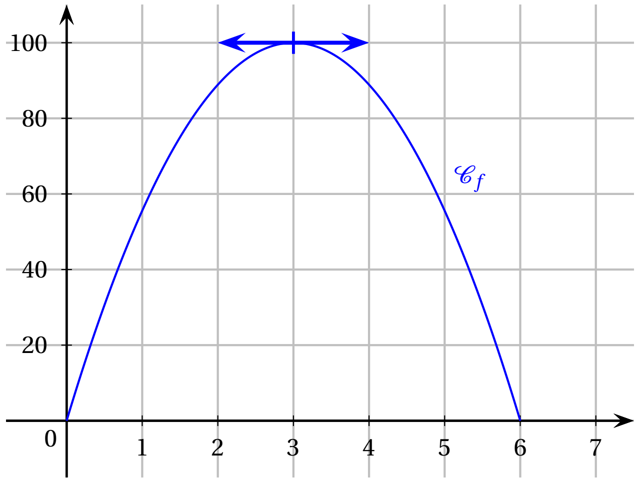
Exercice 5. Fonction — 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

On appelle fonction « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « satisfaction » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « saturation ». On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ». On dira qu'il y a « souhait » lorsque la fonction « envie » est positive ou nulle et qu'il y a « rejet » lorsque la fonction « envie » est strictement négative.

Partie A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « satisfaction » f dont la courbe est donnée ci-dessous (x en heures).



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. **Lire la durée de travail quotidien menant à « saturation ».**
Lorsque la fonction « satisfaction » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « saturation ». Il y a donc « saturation » au bout de 3 heures de travail.

2. **Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « rejet ».**
La fonction « envie » est la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ». Il y a « rejet » lorsque la fonction « envie » est strictement négative donc quand la fonction f est décroissante. Il y a donc « rejet » après 3 heures de travail.

Partie B

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « satisfaction » g est définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $g(x) = 12,5x\,e^{-0,125x+1}$ (x est exprimé en jour).

1. **Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0;30]$, $g'(x) = (12,5 - 1,5625x)\,e^{-0,125x+1}$.**

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} [0;30] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = (12,5x) \times e^{-0,125x+1} \end{array} \right.$$

La fonction g est dérivable sur $[0;30]$.
La fonction g est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0;30]\ ;\ g(x) = u(x) \times v(x)\ :\ \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = (12,5x) & ; & u'(x) = 12,5 \\ v(x) = e^{-0,125x+1} & ; & v'(x) = \left(-0,125\,e^{-0,125x+1}\right) \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\forall x \in [0;30],\quad g'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$
$$g'(x) = 12,5 \times e^{-0,125x+1} + (12,5x) \times \left(-0,125\,e^{-0,125x+1}\right)$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0;30]\ ;\ g'(x) = (12,5 - 1,5625x)\,e^{-0,125x+1}}$$

©ISSN 2272-5318

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0; 30]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.

Pour tout x, $\mathrm{e}^{-0,125x+1} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe du facteur $(12,5 - 1,5625x)$. Or on a :

$$\begin{cases} 12,5 - 1,5625x > 0 \iff 12,5 > 1,5625x \iff \dfrac{12,5}{1,5625} > x \iff x < 8 \\ 12,5 - 1,5625x = 0 \iff 12,5 = 1,5625x \iff \dfrac{12,5}{1,5625} = x \iff x = 8 \end{cases}$$

Avec

$$f(0) = 0,\ f(8) = 100 \text{ et } f(30) \approx 24$$

On établit le tableau des variations de la fonction g sur $[0; 30]$:

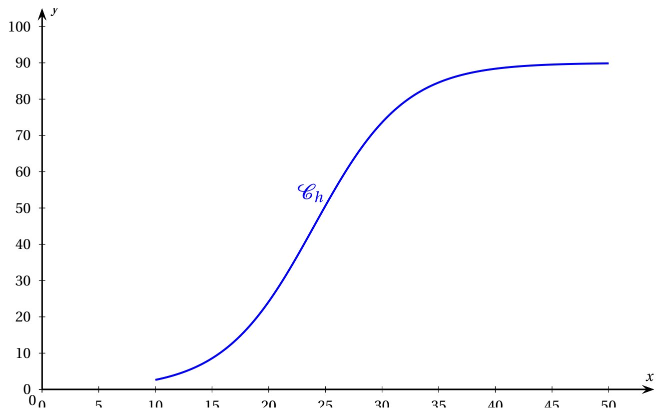
x	0		8		30
Signe de $g'(x)$		+	0	−	
Variations de g	0	↗	100	↘	$f(30) \approx 24$

3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet « saturation » ?

D'après le tableau de variations, l'effet « saturation » apparaît au bout d'un séjour de 8 jours.

Partie C

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « satisfaction » h, est définie sur l'intervalle $[10; 50]$ *par* $h(x) = \dfrac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$ *(x est exprimé en millier d'euros). La courbe* $\mathscr{C}_h$ *de la fonction h est représentée ci-dessous :*



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver$(90/(1 + exp(-0.25 * x + 6)))$ $\dfrac{22,5\,\mathrm{e}^{-0,25x+6}}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^2}$
2	Dériver$(22.5 * exp(-0,25x + 6)/(1 + exp(-0,25 * x + 6)^2)$ $\dfrac{5,625\,\mathrm{e}^{-0,25x+6}(\mathrm{e}^{-0,25x+6} - 1)}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^3}$

1. Donner sans justification une expression de $h''(x)$.

D'après le logiciel de calcul formel,

$$h''(x) = \frac{5,625\,\mathrm{e}^{-0,25x+6}\left(\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}\right)^3}$$

2. Résoudre dans l'intervalle [10 ; 50] l'inéquation $\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1>0$.

On résout dans l'intervalle [10 ; 50] l'inéquation $\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1>0$:

$$\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1>0 \iff \mathrm{e}^{-0,25x+6}>1$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1>0 &\iff -0,25x+6>\ln 1=0\\ &\iff x<\frac{-6}{-0,25}=24 \text{ et } x\in[10;50]\end{aligned}$$

Sur l'intervalle [10 ; 50], l'inéquation $\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1>0$ a pour solution [10 ; 24[.

3. Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle [10 ; 50].

La fonction h est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée est croissante, c'est-à-dire quand sa dérivée seconde est positive.

$$h''(x) = \frac{5,625\,\mathrm{e}^{-0,25x+6}\left(\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}\right)^3}$$

Or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc pour tout x on a :

$$\mathrm{e}^{-0,25x+6}>0 \Longrightarrow \left(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}\right)^3>0$$

et

$$\left(5,625\,\mathrm{e}^{-0,25x+6}\right)>0$$

Et donc que $h''(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1$.

D'après la question précédente, on peut dire que :

- $h''(x)>0$ sur [10 ; 24[donc la fonction h est convexe sur [10 ; 24[;
- $h''(x)<0$ sur]24 ; 50] donc la fonction h est concave sur]24 ; 50].

4. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ? Justifier.

La fonction « envie » décroit quand h' décroit donc quand h'' devient négative, soit à partir de $x=24$, ce qui correspond à un salaire annuel de 24 000 euros.

5. Déterminer pour quel salaire annuel la fonction « satisfaction » atteint 80. Arrondir au millier d'euros.

La fonction « satisfaction » atteint 80 quand $h(x)=80$; on résout cette équation :

$$\begin{aligned}h(x)=80 &\iff \frac{90}{1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}}=80\\ h(x)=80 &\iff 90=80\left(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}\right)\\ &\iff \frac{90}{80}=1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}\\ &\iff \frac{9}{8}-1=\mathrm{e}^{-0,25x+6}\\ &\iff \ln\left(\frac{1}{8}\right)=-0,25x+6\\ &\iff 0,25x=6-\ln\left(\frac{1}{8}\right)\\ h(x)=80 &\iff x=\frac{6+\ln(8)}{0,25}\approx 32,3\end{aligned}$$

Donc on peut dire que la fonction « satisfaction » atteint 80 pour un salaire annuel d'environ 32 000 euros.

Fin du devoir