Math93.com

Baccalauréat 2018 - ES/L
Correction Liban

Série ES/L Obli. et Spé.

29 Mai 2018

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique. On note : l'évènement « le voyageur fait sonner le portique » ; M l'évènement « le voyageur porte un objet métallique ». On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que : Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98; Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

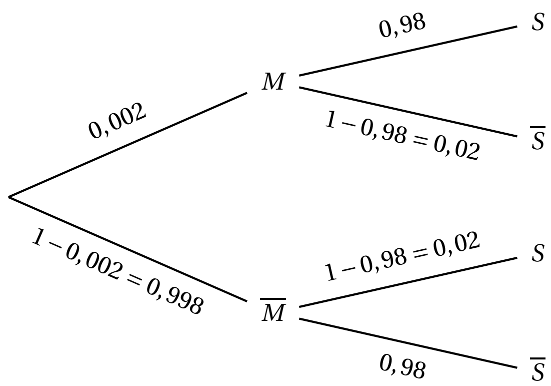
1. a. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S})$.

D'après l'énoncé,

$$P(M)=\frac{1}{500}=0,002\ ;\ P_M(S)=0,98 \text{ et } P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right)=0,98$$

1. b. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.

L'arbre pondéré ci-dessous illustre cette situation :



1. c. Montrer que : $P(S)=0{,}021\,92$.

Les évènements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S\cap M)+P\left(S\cap \overline{M}\right)\\ &= P_M(S)\times P(M)+P_{\overline{M}}(S)\times P\left(\overline{M}\right)\\ &= 0,002\times 0,98+0,998\times 0,02\\ \underline{P(S)} &= \underline{0,021\,92}\end{aligned}$$

1. d. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3}.)

D'après la formule de Bayes :

$$P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{P_M(S) \times P(M)}{P(S)} = \frac{0,002 \times 0,98}{0,02192} \approx \underline{0,089}$$

Remarque historique

Thomas Bayes (1702 – 1761) est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,021 92. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

2. a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Il y a répétition de $n = 80$ événements indépendants et identiques (on tire une personne).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,02192$ quand une personne fait sonner le portique;
- et échec de probabilité $1 - p = 0,97808$ sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 80$ épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0,02192$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n = 80$ et $p = 0,02192$.
On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathscr{B}\left(80\,;\,0,02192\right) \text{ ou } X \sim \mathscr{B}\left(80\,;\,0,02192\right).$$

2. b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

L'espérance d'une loi binomiale est :

$$E(X) = n \times p = 80 \times 0,021\,92 = \underline{1,753\,6}$$

Donc par groupe de 80 personnes le portail sonnera un peu moins de 2 fois.

2. c. Sans le justifier, donner la valeur arrondie à arrondies à 10^{-3} de :

- **la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique** :

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 1) &= 1 - p(X < 1) \\ &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - (1 - 0,021\,92)^{80} \approx \underline{0,830} \end{aligned}$$

- **la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique** :

$$p(X \leqslant 5) \approx \underline{0,992}$$

.

2. d. Sans le justifier, donner la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$.

Avec la calculatrice :

$$p(X \leqslant 2) \approx 0,744 \quad \text{et} \quad p(X \leqslant 3) \approx 0,992$$

Donc la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$ est $\underline{n = 3}$.

Exercice 2. Obligatoire : Suites — 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2018. À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires. Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n-ième mois. On a $u_0 = 20$.

1.

1. a. Montrer que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du 1er mois est de 35 €. Elle dépense le quart des 20 euros de départ, donc il lui reste les trois quarts de la somme, soit 15 euros. Puis elle ajoute 20 euros. Donc elle aura 35 euros le mois suivant. Donc $\underline{u_1 = 35}$.

1. b. Calculer u_2.

$$u_2 = 0,75 \times 35 + 20 = \underline{46,25}$$

2. *On admet que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 20$. On considère l'algorithme suivant :*

```
U ⟵ 20
N ⟵ 0
Tant que U < 70
        U ⟵ 0,75 × U + 20
        N ⟵ N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

2. a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme. On ajoutera autant de colonnes que nécessaire à la place de celle laissée en pointillés. Arrondir les résultats au centième.
On complète le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme en arrondissant les résultats au centième :

Valeur de U	20	35	46,25	54,69	61,02	67,76	69,32	71,99
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7
Condition $U < 70$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

2. b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte.
Cet algorithme affiche la valeur $N = 7$; donc au bout du 7e mois la somme disponible sera supérieure à 70 euros.

3. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 80$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 &= 20 \\ u_{n+1} &= 0,75 \times u_n + 20 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n &= u_n - 80 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 80 \\
v_{n+1} &= (0,75\, u_n + 20) - 80 \\
v_{n+1} &= 0,75 \times u_n - 60 \\
v_{n+1} &= 0,75 \times \left(u_n + \frac{-60}{0,75}\right) \\
v_{n+1} &= 0,75 \times (u_n - 80) \\
v_{n+1} &= 0,75 \times v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$, et de premier terme $v_0 = -60$ puisque :

$$v_0 = u_0 - 80$$
$$v_0 = 20 - 80$$
$$v_0 = -60$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -60 \\ v_{n+1} & = 0{,}75 \times v_n \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. Préciser son premier terme v_0.

On a montré que $v_0 = -60$

3. c. En déduire que, pour tout entier n, $u_n = 80 - 60 \times 0{,}75^n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}75$, et de premier terme $v_0 = -60$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = -60 \times (0{,}75)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 80$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 80$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = -60 \times (0{,}75)^n + 80}$$

3. d. Déterminer, au centime près, le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2019.

Pour trouver le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2019, on cherche la somme disponible fin mai 2019, ce qui correspond à $n = 10$:

$$u_{10} = 80 - 60 \times 0{,}75^{10} \approx 76{,}62$$

Maya aura donc 76,62€ le 1er juin 2019.

3. e. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

La raison $q = 0{,}75$ de la suite géométrique (v_n) est strictement comprise entre -1 et 1, donc sa limite quand n tend vers l'infini est égale à 0.

3. f. En déduire la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

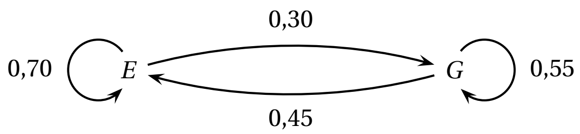
Donc la limite de la suite (u_n) est égale à 80; cela signifie que le montant maximum (jamais atteint) de la somme d'argent disponible sera de 80 euros.

Exercice 3. Spécialité — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays deux opérateurs se partagent le marché des télécommunications mobiles. Une étude révèle que chaque année : parmi les clients de l'opérateur EfficaceRéseau, 70 % se réabonnent à ce même opérateur et 30 % souscrivent un contrat avec l'opérateur GenialPhone; parmi les clients de l'opérateur GenialPhone, 55 % se réabonnent à ce même opérateur et 45 % souscrivent un contrat avec l'opérateur Efficaceréseau. On note E l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur EfficaceRéseau » et G l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur GenialPhone ». À partir de 2018, on choisit au hasard un client de l'un des deux opérateurs. On note également : e_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur EfficaceRéseau au 1er janvier $(2018+n)$; g_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur GenialPhone au 1er janvier $(2018+n)$; $P_n = \begin{pmatrix} e_n & g_n \end{pmatrix}$ désigne la matrice ligne traduisant l'état probabiliste du système au 1er janvier $(2018+n)$. Au 1er janvier 2018, on suppose que 10 % des clients possèdent un contrat chez EfficaceRéseau , ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

1. **Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets E et G.**
On représente cette situation par un graphe probabiliste de sommets E et G :



2.

2. a. Déterminer la matrice de transition M associée au graphe en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.
La matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,30 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$$

2. b. Vérifier qu'au 1er janvier 2020, environ 57 % des clients ont un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau.*

$$P_2 = P_0 \times M^2 = (0,56875 \quad 0,43125)$$

donc

$$e_2 \approx 0,57$$

Au 1er janvier 2020, environ 57 % des clients ont un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau.*

3.

3. a. On rappelle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$. Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n et g_n.
Donc pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n \times M &\iff (e_{n+1} \quad g_{n+1}) = (e_n \quad g_n) \times \begin{pmatrix} 0,70 & 0,30 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix} \\ &\iff (e_{n+1} \quad g_{n+1}) = (0,70 \times e_n + 0,45 \times g_n \quad 0,30 \times e_n + 0,55 \times g_n) \end{aligned}$$

Donc

$$\underline{e_{n+1} = 0,70 e_n + 0,45 g_n}$$

3. b. En déduire que pour tout entier naturel n, $e_{n+1} = 0,25 e_n + 0,45$.
Pour tout entier naturel n, $e_n + g_n = 1$ donc $g_n = 1 - e_n$.

$$\begin{cases} e_{n+1} = 0,70 e_n + 0,45 g_n \\ g_n = 1 - e_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_{n+1} = 0,70 e_n + 0,45(1 - e_n) \\ g_n = 1 - e_n \end{cases} \Longrightarrow \boxed{e_{n+1} = 0,25 e_n + 0,45}$$

4. **4. a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au 1er janvier $(2018+n)$:**
On complète l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au 1er janvier $(2018+n)$:

```
E ⟵ 0,1
G ⟵ 0,9
Pour I allant de 1 à N
        E ⟵ 0,25 × E + 0,45
        G ⟵ 1 − E
Fin Pour
Afficher E et G
```

4. b. Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $N=3$ Arrondir au centième.
Pour $N=3$, l'algorithme affiche :

$$\underline{E \approx 0,59} \text{ et } \underline{G \approx 0,41}.$$

4. c. Déterminer l'état stable du système et interpréter votre réponse dans le contexte de l'exercice.

Définition 1 (État stable)

Un état stable d'un graphe probabiliste à deux états, de matrice de transition M est un état $P=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} P = P\times M \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ P=P\times M \end{cases} \iff \begin{cases} x=1-y \\ x=0,7x+0,45y \\ y=0,3x+0,55y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1-y \\ -0,3x+0,45y=0 \\ 0,3x-0,45y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1-y \\ -0,3+0,3y+0,45y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1-y \\ 0,75y=0,3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1-y \\ y=0,4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0,6 \\ y=0,4 \end{cases}$$

L'état stable est donc $\boxed{P=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}}$.

Propriété 1 (État stable)

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.
Cet état stable vérifie l'égalité :

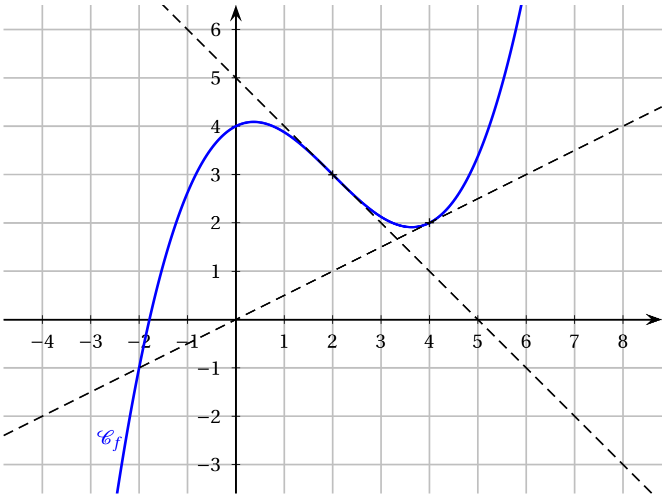
$$P = P\times M$$

Interprétation : Sur le long terme 60% des clients auront un contrat avec EfficaceRéseau et 40% avec GénialPhone.

Exercice 3. QCM — 4 points

Commun à tous les candidats

*Pour les questions **1.** et **2.** et **3.**, on a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes aux points d'abscisses respectives 2 et 4.*



Question 1 (Réponse C)

$f'(4)$ est égal à :

A. 2	**B.** -1
C. $0,5$	**D.** 0

Preuve.
Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 4 est égale à $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.
Donc $f'(4) = 0,5$. **Réponse C**.

Question 2 (Réponse D)

f est convexe sur l'intervalle :

A. $]-\infty\,;2]$	**B.** $]-\infty\,;0,5]$
C. $[0\,;4]$	**D.** $[2\,;5]$

Preuve.
L'unique point d'inflexion se trouve au point d'abscisse 2, puisque la courbe y change de concavité, la tangente à la courbe passe de part et d'autre de celle-ci. La fonction f est donc concave sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ puis convexe sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$. La fonction f est donc convexe sur l'intervalle $[2\,;5]$. **Réponse D**.

Question 3 (Réponse C)

Une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;5]$ est :

A. $-0,1$	**B.** $2,5$
C. $2,9$	**D.** $14,5$

Preuve.
En comptant les unités d'aires, on peut estimer l'aire du domaine compris pour x entre 0 et 5, et pour y entre l'axes des abscisses et la courbe représentative de la fonction. Ainsi : $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 14,5$.
La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle se calcule avec la formule :

$$\frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{14,5}{5} \approx 2,9$$

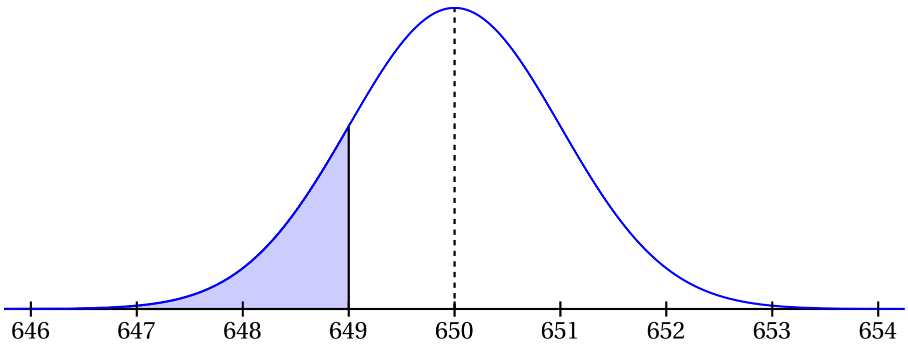
Réponse C.

Question 4

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale et telle que

$$P(X \leqslant 649) \approx 0{,}1587.$$

On note respectivement μ et σ l'espérance et l'écart-type de cette loi normale.



A. $P(X \leqslant 651) \approx 0{,}6587$	**B.** $P(649 \leqslant X \leqslant 651) \approx 0{,}683$
C. $\sigma = 650$	**D.** $\mu = 649$

Preuve.
Nous savons que puisque $\mu = 650$:

$$P(X \leqslant 649) \approx 0{,}1587 \Longleftrightarrow P(X \leqslant \mu - 1) \approx 0{,}1587$$

Donc (par symétrie),

$$P(X \leqslant \mu + 1) \approx 0{,}1587 \Longleftrightarrow P(X \geqslant 651) \approx 0{,}1587$$

Donc

$$\begin{aligned} P(649 \leqslant X \leqslant 651) &= 1 - \left(P(X \leqslant 649) + P(X \geqslant 651)\right) \\ &\approx 1 - 2 \times 0,1587 \approx 0,6826 \\ &\approx \underline{0{,}683} \end{aligned}$$

Réponse B.

Exercice 3. Fonction — 5 points

Commun à tous les candidats

1. *Soit f la fonction définie sur l'intervalle* $[1\,;\,25]$ *par* $f(x) = \dfrac{x+2-\ln(x)}{x}$.

1. a. On admet que f est dérivable sur $[1\,;\,25]$. Démontrer que sur $[1\,;\,25]$, $f'(x) = \dfrac{-3+\ln(x)}{x^2}$.

La fonction f est définie et dérivable surl'intervalle $[1\,;\,25]$. Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = x+2-\ln(x)$	$u'(x) = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
$v(x) = x$	$v'(x) = 1$

Pour tout réel x de $[1\,;\,25]$:

$$f(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f(x) = \frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\times(x) - (x+2-\ln(x))\times(1)}{(x)^2}$$

$$f(x) = \frac{x-1-x-2+\ln x}{(x)^2}$$

$$\underline{\forall x \in [1\,;\,25]}\,;\ \boxed{f'(x) = \frac{-3+\ln(x)}{(x)^2}}$$

1. b. Résoudre dans $[1\,;\,25]$ l'inéquation $-3+\ln(x) > 0$.

Sur $[1\,;\,25]$, on a

$$-3+\ln(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln(x) > 3$$

On compose par la fonction exponentielle qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'ordre est inchangé :

$$-3+\ln(x) > 0 \Longleftrightarrow x > \mathrm{e}^3 \text{ et } x \in [1\,;\,25]$$

Donc sur $[1\,;\,25]$ l'intervalle solution est : $\underline{x \in [\mathrm{e}^3\,;\,25]}$

1. c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[1\,;\,25]$.

Pour tout $x \in [1\,;\,25]$, $f'(x)$ a le même signe que $-3+\ln(x)$ dont on vient de faire l'étude de signe précédemment. Par ailleurs :

$$f\left(\mathrm{e}^3\right) = \frac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3} \approx 0{,}950 \text{ et } f(25) = \frac{27-\ln(25)}{25} \approx 0{,}951$$

Donc le tableau de variations de la fonction f sur $[1\,;\,25]$ est :

x	1		e^3		25
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	3	$\searrow$	$\dfrac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3} \approx 0.950$	$\nearrow$	$\dfrac{27-\ln(25)}{25} \approx 0.951$

1. d. Démontrer que sur [1 ; 25], l'équation $f(x) = 1,5$ admet une seule solution. On la notera α .

x	1	α	e^3	25
Variations de f	3 ↘	1.5 ↘	$\dfrac{e^3-1}{e^3} \approx 0.950$ ↗	$\dfrac{27-\ln(25)}{25} \approx 0.951$

- Sur l'intervalle $[e^3 ; 25]$, l'équation $f(x) = 1,5$ n'admet aucune solution car

$$1,5 \notin \left[\frac{e^3-1}{e^3} ; \frac{27-\ln(25)}{25}\right]$$

- Application du corollaire sur $[1 ; e^3]$:

Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a ; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a ; b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

  – La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[1 ; e^3]$;
  – Le réel $k = 1,5$ est compris entre $f(1) = 3$ et $f(e^3) \approx 0,95$
  – Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
  l'équation $f(x) = 1,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1 ; e^3]$.

- Conclusion : Donc dans l'intervalle [1 ; 25], l'équation $f(x) = 1,5$ admet une seule solution.

1. e. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α à l'aide de la calculatrice.

Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(2,31) & \approx & 1,503 > 1,5 \\ f(2,32) & \approx & 1,499 > 1,5 \end{array}\right| , \quad \text{donc } 2,31 < \alpha < 2,32.$$

2. *Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques. On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros. En utilisant les résultats obtenus à la question **1.** :*

2. a. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

D'après la question **1. c**, le coût minimal est obtenu pour $x = e^3$ centaines de pièces, soit pour environ 2 009 pièces.

Ce coût minimal sera de $\dfrac{e^3-1}{e^3}$ soit environ 0,950 euro.

2. b. Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro.

D'après la question **1. d**, le nombre minimal de pièces à fabriquer sera de 2,32 centaines de pièces, soit environ 232 pièces.

2. c. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

Il sera impossible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes (0,50 euro), car sur l'intervalle [1; 25] (de 100 à 2 500 pièces),

$$f(x) \geqslant f\left(e^3\right) \approx 0,95$$

soit un coût minimal d'environ 0,95 euro.

Fin du devoir