Math93.com

Baccalauréat 2018 - ES/L
Correction Antilles/Guyane

Série ES/L Obli. et Spé.

19 juin 2018

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. QCM — 4 points

Commun à tous les candidats

Question 1 (Réponse b)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$ par $f(x) = (2x-3)\,\mathrm{e}^{-3x}$. L'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$:

a. 0 solution **b.** $\boxed{\text{1 solution}}$ **c.** 2 solutions **d.** 3 solutions

Preuve.
Pour x de l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$, la fonction exponentielle est strictement positive donc :

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x-3 = 0 \Longleftrightarrow x = 1{,}5 \in [-10\ ;\ 10]$$

L'équation $f(x) = 0$ admet $\underline{\text{1 solution}}$ sur l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$

Question 2 (Réponse b)

Dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ on considère la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$; l'équation de sa tangente au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 1$ **b.** $\boxed{y = x-1}$ **c.** $y = 1-x$ **d.** $y = x+1$

Preuve.
On a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln' x = \dfrac{1}{x}$ donc $\ln' 1 = \dfrac{1}{1} = 1$.

L'équation de la tangente (T) á la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point d'abscisse $a = 1$ est $(T)\ :\ y = \ln'(a)(x-a) + \ln(a)$.
Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} \ln(1) & = +0 \\ \ln'(1) & = 1 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{ll} (T)\ : & y = 1 \times (x-1)\ +0 \\ & \underline{y = x-1} \end{array}$$

Question 3 (Réponse d)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 25$ et $\sigma = 3$. La meilleure valeur approchée du réel t tel que $P(X > t) = 0,025$ est :

a. $t \approx 0,97$ **b.** $t \approx 19,12$ **c.** $t \approx 28$ **d.** $\boxed{t \approx 30,88}$

Preuve.
On cherche

$$P(X > t) = 0,025 \iff P(X \leq t) = 1 - 0,025 = 0,975$$

On cherche t tel que $P(X \leq t) = 0,975$ où X qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(25\,;\,3^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-2} près :

$$\boxed{P(X \leq t) = 0,975 \iff t \approx \underline{30,88}}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0.975\ ,\ 25\ ,\ 3) \approx \underline{30,879\,891\,95}$
- *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0.975\ ,\ 25\ ,\ 3)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0.975\ ,\ 25\ ,\ 3)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0.975\ ,\ 3\ ,\ 25)$

Question 4 (Réponse b)

Anne prévoit d'appeler Benoît par téléphone à un moment choisi au hasard entre 8 h 30 et 10 h. Benoît sera dans un train à partir de 9 h pour un trajet de plusieurs heures. Quelle est la probabilité qu'Anne appelle Benoît alors qu'il est dans le train ?

a. $\dfrac{60}{150}$ **b.** $\boxed{\dfrac{2}{3}}$ **c.** $\dfrac{6}{13}$ **d.** $\dfrac{1}{13}$

Preuve.
Posons D la variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[8,5\,;\,10]$. Cette variable modélise l'heure à laquelle Anne appelle Benoît.

Propriété 1

Soit X la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. Pour tout c et d de l'intervalle $[a\,;\,b]$ avec $c < d$ on a :

$$\boxed{P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}} \ :\ (1) \quad \text{et} \quad \boxed{E(X) = \frac{b+a}{2}} \ :\ (2)$$

La probabilité qu'Anne appelle Benoît alors qu'il est dans le train est :

$$P(D \geqslant 9) = P(9 \leq D \leq 10) = \frac{10-9}{10-8,5} = \frac{2}{3}$$

 ©ISSN 2272-5318

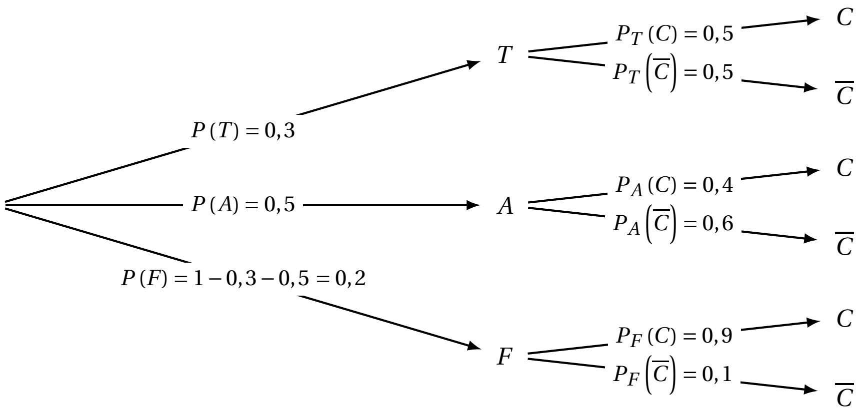
Exercice 2. Obligatoire : Probabilités — 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Partie A

Victor a téléchargé un jeu sur son téléphone. Le but de ce jeu est d'affronter des obstacles à l'aide de personnages qui peuvent être de trois types : « Terre », « Air » ou « Feu ». Au début de chaque partie, Victor obtient de façon aléatoire un personnage d'un des trois types et peut, en cours de partie, conserver ce personnage ou changer une seule fois de type de personnage. Le jeu a été programmé de telle sorte que : la probabilité que la partie débute avec un personnage de type « Terre » est 0,3; la probabilité que la partie débute avec un personnage de type « Air » est 0,5; si la partie débute avec un personnage de type « Terre », la probabilité que celui-ci soit conservé est 0,5; si la partie débute avec un personnage de type « Air », la probabilité que celui-ci soit conservé est 0,4; si la partie débute avec un personnage de type « Feu », la probabilité que celui-ci soit conservé est 0,9. On note les évènements suivants : T : la partie débute avec un personnage de type « Terre »; A : la partie débute avec un personnage de type « Air »; F : la partie débute avec un personnage de type « Feu »; C : Victor conserve le même personnage tout au long de la partie.

1. **Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.**



2. **Calculer la probabilité que Victor obtienne et conserve un personnage de type « Air ».**
La probabilité que Victor obtienne et conserve un personnage de type « Air » est :

$$P(A \cap C) = P_A(C) \times P(A) = 0,4 \times 0,5 = \underline{0,2}$$

3. **Justifier que la probabilité que Victor conserve le personnage obtenu en début de partie est 0,53.**
Les évènements T, A et F forment une partition de l'univers don d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P(T \cap C) + P(F \cap C) \\ &= 0,2 + 0,3 \times 0,5 + 0,2 \times 0,9 \\ P(C) &= \underline{0,53} \end{aligned}$$

4. **On considère une partie au cours de laquelle Victor a conservé le personnage obtenu en début de partie. Quelle est la probabilité que ce soit un personnage de type « Air » ?**
On considère une partie au cours de laquelle Victor a conservé le personnage obtenu en début de partie. La probabilité que ce soit un personnage de type « Air » est :

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0,2}{0,53} = \underline{0,38}$$

Partie B

On considère 10 parties jouées par Victor, prises indépendamment les unes des autres. On rappelle que la probabilité que Victor obtienne un personnage de type « Terre » est 0,3. Y désigne la variable aléatoire qui compte le nombre de personnages de type « Terre » obtenus au début de ses 10 parties.

1. Justifier que cette situation peut être modélisée par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Il y a répétition de $n = 10$ événements indépendants et identiques (on tire un personnage).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0.3$ quand le personnage est de type « Terre » ;
- et échec de probabilité $1 - p = 0,7$ sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 10$ épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0.3$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n = 10$ et $p = 0.3$.
On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathscr{B}\left(10\,;\,0.3\right) \text{ ou } X \sim \mathscr{B}\left(10\,;\,0.3\right).$$

2. Calculer la probabilité que Victor ait obtenu exactement 3 personnages de type « Terre » au début de ses 10 parties.
Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0.3$ on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{k} \times 0.3^k \times (0,7)^{10-k}$$

Et donc

$$p(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0.3^3 \times 0,7^7$$

Soit :

$$\boxed{p(X = 3) \approx 0.27}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomDdP* (10 , 0.3 , 3) ≈ 0,27
> - *Sur TI82/83+ : Menu Distrib ⇒ binomFdp* (10 , 0.3 , 3) ≈ 0,27
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM ⇒ binomialPD* (3 , 10 , 0.3) ≈ 0,27

3. Calculer la probabilité que Victor ait obtenu au moins une fois un personnage de type « Terre » au début de ses 10 parties.
La probabilité que Victor ait obtenu au moins une fois un personnage de type « Terre » au début de ses 10 parties est $P(Y \geq 1)$ soit en passant à l'évènement contraire :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,7^{10} \approx \underline{0,97}$$

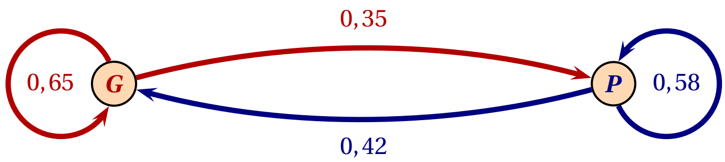
Exercice 3. Spécialité : Graphes 5 points

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A

Après plusieurs semaines, des statistiques données par le logiciel lui permettent de dire que : quand il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à $0,65$ *; quand il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à* $0,42$*. On note G l'état : « Franck gagne la partie » et P l'état : « Franck perd la partie ». Sur une période donnée, on note, pour tout entier naturel* n *non nul :* g_n *la probabilité que Franck gagne la* n*-ième partie;* p_n *la probabilité que Franck perde la* n*-ième partie. Dans cette période, Franck a gagné la première partie.*

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets notés G et P.



2.

2. a. Écrire la matrice de transition M dans l'ordre G-P.

La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1ère ligne : probabilité d'aller de G vers G, de G vers P;
- 2ème ligne : probabilité d'aller de P vers G, de P vers P.

On obtient donc :

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}0,65 & 0,35\\ 0,42 & 0,58\end{pmatrix}}$$

2. b. Calculer la probabilité que Franck gagne la troisième partie.

Pour $n\geq 1$ notons $F_n=\begin{pmatrix}g_n & p_n\end{pmatrix}$ l'état de la partie n. Puisque Franck gagne la première partie, on a $F_1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.
On a alors pour n entier, $n\geq 1$:

$$\begin{cases}F_{n+1}=F_n\times M\\ F_n=F_1\times M^{n-1}\end{cases}\implies F_3=F_1\times M^2$$

On a donc :

$$F_3=F_1\times M^2=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,65 & 0,35\\ 0,42 & 0,58\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,65 & 0,35\\ 0,42 & 0,58\end{pmatrix}$$

$$F_3=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,5695 & 0,43305\\ 0,5166 & 0,4834\end{pmatrix}$$

$$F_3=\begin{pmatrix}0,5695 & 0,43305\end{pmatrix}$$

$$F_3=\begin{pmatrix}g_3 & p_3\end{pmatrix}$$

La probabilité que Franck gagne la troisième partie est donc $\underline{g_3=0,5695}$.

3. Déterminer l'état stable du système et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

- État stable.

Définition 1 (État stable)

Un état stable d'un graphe probabiliste à deux états, de matrice de transition M est un état $P=\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} P = P\times M \\ x+y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases} P = PM \\ x+y=1\end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,42 & 0,58\end{pmatrix} \\ x+y=1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0,65x+0,42y \\ y=0,35x+0,58y \\ x+y=1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -0,35x+0,42y=0 \\ 0,35x-0,42y=0 \\ x=1-y\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -0,35+0,35y+0,42y=0 \\ x=1-y\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,77y=0,35 \\ x=1-y\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=\dfrac{5}{11} \\ x=\dfrac{6}{11}\end{cases}$$

L'état stable est donc :

$$\boxed{P=\begin{pmatrix} \dfrac{6}{11} & \dfrac{5}{11}\end{pmatrix}}$$

- Interprétation.

Propriété 2 (État stable)

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.
Cet état stable vérifie l'égalité :

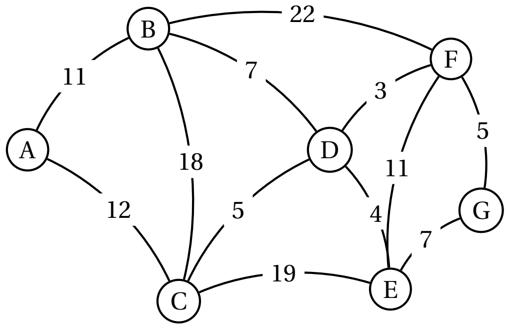
$$P = P\times M$$

Cela signifie que sur le long terme, la probabilité que Franck gagne une partie est de $\dfrac{6}{11}\approx 0,55$.

Partie B

Dans ce jeu vidéo, Franck circule dans des catacombes infestées de monstres qu'il doit combattre.

On a représenté ci-contre le graphe modélisant ces catacombes. Les sommets représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs. Les étiquettes du graphe correspondent au nombre de monstres présents dans chaque couloir.



1.

1. a. Justifier qu'il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.

- Position du problème : partir d'une salle quelconque, et y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois c'est rechercher un cycle eulérien.
- Graphe Connexe

Définition 2 (Graphe connexe)

Un graphe est dit connexe si on peut relier n'importe quelle paire de sommets par une chaîne.

Dans le graphe proposé, il existe une chaîne contenant tous les sommets du graphe,
la chaîne : $A-B-C-D-E-F-G$ donc le graphe est connexe.

- Application du Théorème.
Une chaîne eulérienne est une chaîne satisfaisant aux conditions suivantes : elle contient toutes les arêtes du graphe et chaque arête n'est décrite qu'une seule fois. Un cycle est une chaîne ayant les mêmes extrémités.

Théorème 1 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* différente d'un cycle si et seulement si il possède exactement 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	2	4	4	4	4	4	2

Donc tous les sommets sont de degré pair . Par conséquent, d'après le théorème d'Euler-Hierholzer, ce graphe connexe admet un cycle eulérien.

1. b. Donner un tel chemin.

On a par exemple :

$$A-B-F-G-E-F-D-E-C-D-B-C-A$$

2. **Franck débute le jeu dans la salle A et doit atteindre l'adversaire final en salle G. Existe-t-il un chemin permettant de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs?**
Tous les degrés des sommets sont pairs. Le graphe ne possède donc pas de chaîne eulérienne différente d'un cycle d'après le théorème d'Euler-Hierolzer. Il n'existe donc pas de chemin permettant de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs.

3. **Une fois arrivé en salle G, Franck souhaite revenir en salle A en affrontant le moins de monstres possible afin de recommencer une nouvelle partie.**
Déterminer ce trajet minimal et préciser le nombre de monstres affrontés.
Pour cela appliquons l'algorithme de Dijkstra.
Remarque : L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.

de .. à	à A	à B	à C	à D	à E	à F
G					7G	**5G**
$F5$		27F		8F	**7G**	
$E7$		27F	26E	**8F**		
$D8$		15D	**13D**			
$C13$	25C	**15D**				
$B15$	**25C**					

Le chemin le plus court pour relier G à A est :

$$\boxed{G \xrightarrow{5} F \xrightarrow{3} D \xrightarrow{5} C \xrightarrow{12} A}$$

Donc nombre minimal de monstres sera de 25.

Exercice 3. Suites — 5 points

Commun à tous les candidats

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par, pour tout entier naturel n

$$\begin{cases} u_0 & = & 10 \\ u_{n+1} & = & u_n + 0,4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 & = & 8 \\ v_{n+1} & = & 1,028 v_n \end{cases}$$

1.

1. a. Parmi ces deux suites, préciser laquelle est arithmétique et laquelle est géométrique ; donner leurs raisons respectives.

- La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 0,4$ car sa relation de récurrence s'exprime, pour n entier sous la forme, :
$$u_{n+1} = u_n + r \text{ avec } r = 0,4$$
- La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,028$ car sa relation de récurrence s'exprime, pour n entier sous la forme, :
$$v_{n+1} = q \times v_n \text{ avec } q = 1,028$$

1. b. Exprimer u_n et v_n en fonction de l'entier naturel n.

- La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 0,4$ et de premier terme $u_0 = 10$ donc son terme général est, pour n entier :
$$u_n = u_0 + nr = \underline{10 + 0,4n}$$
- La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,028$ et de premier terme $v_0 = 8$ donc son terme général est, pour n entier :
$$v_n = u_0 \times q^n = \underline{8 \times 1,028^n}$$

2. On donne l'algorithme suivant dans lequel n est un entier naturel, et U et V sont des réels qui désignent respectivement les termes de rang n des suites (u_n) et (v_n) :

```
n ← 0
U ← 10
V ← 8
Tant que U > V
    U ← U + 0,4
    V ← V × 1,028
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

En sortie de cet algorithme, n a pour valeur 46. Interpréter ce résultat.
Cet algorithme détermine le premier rang n pour lequel $u_n \leq v_n$.
On peut vérifier à l'aide de la calculatrice que :

n	44	45	46	47	48
u_n	27.6	28	$u_{46} = 28.4$	28.8	29.2
$v_n \approx$	26.96	27.72	$v_{48} \approx 28.49 > u_{46}$	29.2932	30.11337904

3. *En 1798, l'économiste anglais Thomas Malthus publie « An essay on the principle of population » dans lequel il émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira son pays à la famine. Il écrit :*

> *« Nous pouvons donc tenir pour certain que, lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle va doublant tous les vingt-cinq ans, et croît de période en période selon une progression géométrique. [...] Nous sommes donc en état de prononcer, en partant de l'état actuel de la terre habitée, que les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables de l'industrie, ne peuvent jamais augmenter plus rapidement que selon une progression arithmétique. »*

En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 *millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir* 10 *millions de personnes. Le modèle de Malthus admet que la population augmente de* 2,8 % *chaque année et que les progrès de l'agriculture permettent de nourrir* 0,4 *million de personnes de plus chaque année. On utilisera ce modèle pour répondre aux questions suivantes.*

3. a. Quelle aurait été, en million d'habitants, la population de l'Angleterre en 1810 ? On arrondira le résultat au millième.

Le modèle de Malthus admet que la population augmente de 2,8 % chaque année donc cela revient à multiplier la population d e l'année précédente pat $1+2,8\% = 1,028$. La suite (v_n) décrit donc le nombre d'habitant en Angleterre durant l'année $1800+n$.

En million d'habitants, la population de l'Angleterre en 1810 est donnée selon ce modèle par v_{10} soit :

$$u_{10} = 8\times 1,028^{10} \approx \underline{10,544}$$

3. b. À partir de quelle année la population de l'Angleterre aurait-elle dépassé 16 millions d'habitants ?

Pour déterminer à partir de quelle année la population de l'Angleterre aurait dépassé 16 millions d'habitants il faut résoudre l'inéquation $v_n > 16$.

$$\begin{aligned} u_n > 16 &\Longleftrightarrow 8\times 1,028^n > 16 \\ &\Longleftrightarrow 1,028^n > 2 \end{aligned}$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\begin{aligned} v_n > 16 &\Longleftrightarrow \ln\left(1,028^n\right) > \ln 2 \\ &\Longleftrightarrow n\ln 1,028 > \ln 2 \\ v_n > 16 &\Longleftrightarrow n > \frac{\ln 2}{\ln 1,028} \approx 25,1 \end{aligned}$$

Or n est un entier donc :

$$\underline{v_n > 16 \Longleftrightarrow n \geq 26}$$

La population de l'Angleterre aurait dépassé 16 millions avec ce modèle en $1800+26 = \underline{1826}$.

3. c. À partir de quelle année la population de l'Angleterre serait -elle devenue trop grande pour ne plus être suffisamment nourrie par son agriculture ?

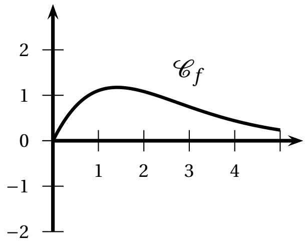
Le modèle de Malthus admet que les progrès de l'agriculture permettent de nourrir 0,4 million de personnes de plus chaque année. La suite arithmétique (u_n) décrit donc le nombre d'habitants que l'agriculture peut nourrir.

D'après la réponse à la question (2.), c'est à partir de 1846 que la population de l'Angleterre serait devenue trop grande pour ne plus être suffisamment nourrie par son agriculture.

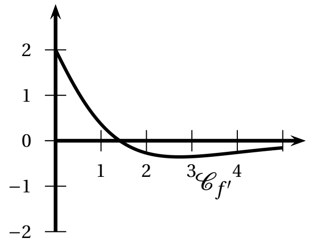
 ©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Fonctions 6 points

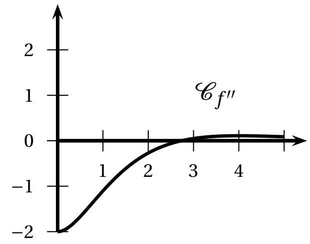
Commun à tous les candidats



Courbe $\mathscr{C}_f$



Courbe $\mathscr{C}_{f'}$



Courbe $\mathscr{C}_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathscr{C}_{f'}$ et $\mathscr{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.

Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

1. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.
La fonction f semble atteindre son maximum en $x = m$ avec $\underline{1 < m < 2}$.

2.

2. a. Donner un intervalle défini par deux entiers sur lequel la fonction f semble convexe.
La fonction f semble convexe sur l'intervalle $[3 ; 4]$ puisque la courbe de la dérivée seconde est au dessus de l'axe des abscisses et dons f'' semble positive sur cet intervalle.

2. b. Expliquer pourquoi on peut conjecturer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de ce point d'inflexion.
La fonction dérivée seconde f'' semble s'annuler en changeant de signe en $x = x_I$ avec $2 < x_I < 3$. La courbe de f semble donc passer de concave ($f'' < 0$) à convexe ($f'' > 0$) . L'abscisse de ce point est comprise entre 2 et 3.

3. Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?
a. $y = x$, **b.** $y = 2x+1$, **c.** $y = 2x$, **d.** $y = \dfrac{3}{4}x$.

- Sur la courbe $\mathscr{C}_{f'}$: l'image de 0 est 2 par f' soit $f'(0) = 2$;
- Sur la courbe $\mathscr{C}_f$: l'image de 0 est 0 par f soit $f(0) = 0$;
- Équation
  L'équation de la tangente (T) á la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 0$ est $(T) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
  Donc ici on obtient :

$$\begin{cases} f(0) & = +0 \\ f'(0) & = 2 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} (T) : & y = 2 \times (x-0) + 0 \\ & \underline{y = 2x} \end{array}$$

4. On note $I = \displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$ où f' est la fonction dérivée de f. Comment s'interprète graphiquement ce nombre I ?
D'après la courbe $\mathscr{C}_{f'}$, la fonction dérivée f' est positive (et continue) sur l'intervalle $[0; 1]$. L'intégrale I correspond don, en unités d'aire, à l'aire du domaine délimité par les droite verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_{f'}$.

Partie B

La fonction f représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle [0; 5] par $f(x) = \left(x^2 + 2x\right) e^{-x}$.

1.

1. a. Montrer que la dérivée f' de f est définie par $f'(x) = \left(-x^2 + 2\right) \mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x de l'intervalle [0; 5].

$$f : \begin{cases} [0\,;\,5] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad f(x) = \left(x^2 + 2x\right) \times \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur [0 ; 5] et de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,5]\,;\ f(x) = u(x) \times v(x) \ : \ \begin{cases} u(x) = \left(x^2 + 2x\right) & ; \quad u'(x) = (2x + 2) \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} & ; \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;\,5],\ \ f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= (2x + 2) \times \mathrm{e}^{-x} + \left(x^2 + 2x\right) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{-x} \times \left(2x + 2 - x^2 - 2x\right) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,5]\,;\ f'(x) = \left(-x^2 + 2\right) \mathrm{e}^{-x}}$$

1. b. Déterminer les variations de f sur [0; 5] et préciser l'abscisse de son maximum.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle [0 ; 5], la fonction dérivée est du signe du facteur $(-x^2 + 2)$.

La fonction $x \longmapsto (-x^2 + 2)$ est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$. On peut facilement en déterminer les racines puisque :

$$-x^2 + 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff \begin{cases} x = \sqrt{2} \in [0\,;\,5] \\ \text{ ou } \ x = -\sqrt{2} \notin [0\,;\,5] \end{cases}$$

La fonction $x \longmapsto (-x^2 + 2)$ est du signe de $a = -1 < 0$ soit négative à l'extérieur des racines et positive ailleurs. Sur l'intervalle [0 ; 5] on obtient alors :

$$f(x) = \left(x^2 + 2x\right) \mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f\left(\sqrt{2}\right) = \left(2 + 2\sqrt{2}\right) \mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 1,17 \\ f(5) = 35\,\mathrm{e}^{-5} \approx 0,24 \end{cases}$$

x	0		$\sqrt{2}$		5
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	0	↗	$\left(2 + 2\sqrt{2}\right) \mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 1.17$	↘	$35\,\mathrm{e}^{-5} \approx 0.24$

1. c. Donner la valeur arrondie au millième du maximum de f.

La valeur arrondie au millième du maximum de f qui est atteint pour $x = \sqrt{2}$ est :

$$f\left(\sqrt{2}\right) = \left(2 + 2\sqrt{2}\right) \mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx \underline{1,174}$$

2. Avec un outil de calcul on obtient, pour $\int_0^1 f'(x)\,dx$ et $f(1)$, la même valeur approchée 1,103 64. Ces deux valeurs sont-elles égales ?

Une primitive de la fonction dérivée f' est par définition la fonction f donc on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x &= f(1) - f(0)\\ &= f(1) - 0\\ \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x &= f(1)\end{aligned}$$

Les deux valeurs sont donc égales.

Fin du devoir