

⌘ Baccalauréat S Amérique du Nord Correction ⌘
30 mai 2014

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie A : Conditionnement des pots

1. On veut $p(X \leq 49)$. Avec la calculatrice $p(X \leq 49) \approx 0.202$.
2. On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\frac{X-50}{\sigma'}$
 - a. La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.
 - b. Une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leq u) = 0,06$ est $u \approx -1.555$.
 - c. $Z = \frac{X-50}{\sigma'} \Leftrightarrow X = \sigma'Z + 50$

$$p(X \leq 49) = 0,06 \Leftrightarrow p(\sigma'Z + 50 \leq 49) = 0,06 \Leftrightarrow p\left(Z \leq -\frac{1}{\sigma'}\right) = 0,06$$

$$\text{On doit donc avoir } -\frac{1}{\sigma'} = -1,555 \Leftrightarrow \sigma' = \frac{1}{1,555} \approx 0,643$$

La valeur attendue de σ' est donc 0,643.

3.
 - a. Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à tester si un pot est non conforme considéré comme succès de probabilité 0,06,... ou pas.
On répète 50 fois cette épreuve. Y suit donc la loi binomiale de paramètres 50 et 0,06.
 - b. On calcule $p(Y \leq 2)$ avec la calculatrice. La probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes est d'environ 0,416.

Partie B : Campagne publicitaire

On a $n = 140 > 30$, $f = \frac{99}{140}$ donc $nf = 99 > 5$ et $n(1-f) = 41 > 5$. Ainsi, $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit $[0,622; 0,792]$ est donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

Exercice 2

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{D}

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$,
 $g(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} = e^{-x}(5 - 3e^{-x})$.
Comme $e^{-x} > 0$ (exponentielle), $g(x)$ est du signe de $5 - 3e^{-x}$.
 $5 - 3e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 5 > 3e^{-x} \Leftrightarrow \frac{5}{3} > e^{-x} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{3}\right) > -x \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{5}\right) < x$ ce qui est toujours vrai car
 $\ln\left(\frac{3}{5}\right) < 0 < x$.
Finalement, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe \mathcal{C}_f et la droite \mathcal{D} ont un point commun d'abscisse x si et seulement si $f(x) = x-3$ soit $g(x) = 0$ ce qui n'est pas possible car on vient de voir que $g(x) > 0$.
La courbe \mathcal{C}_f et la droite \mathcal{D} n'ont pas de point commun.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe \mathcal{C}_f , N le point d'abscisse x de la droite \mathcal{D} et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN .

- Comme M et N ont la même abscisse, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$,
 $MN = |f(x) - (x - 3)| = |g(x)| = g(x)$ car $g(x) > 0$ d'après la première question.
- Si u est dérivable, $(e^u)' = u'e^u$.
 La dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est donc $x \mapsto -e^{-x}$ et celle de $x \mapsto e^{-2x}$ est $x \mapsto -2e^{-2x}$.
 Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $g'(x) = -5e^{-x} + 2 \times 3e^{-2x} = 6e^{-2x} - 5e^{-x}$.
- g étant dérivable sur $[0; +\infty[$, on étudie le signe de sa dérivée sur $[0; +\infty[$.
 Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$,
 $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6e^{-2x} - 5e^{-x} \geq 0$
 $\Leftrightarrow 6e^{-x} - 5 \geq 0$ on a divisé par $e^{-x} > 0$
 $\Leftrightarrow e^{-x} \geq \frac{5}{6}$
 $\Leftrightarrow -x \geq \ln\left(\frac{5}{6}\right)$ croissance de la fonction \ln
 $\Leftrightarrow x \leq \ln\left(\frac{6}{5}\right)$

En $\ln\left(\frac{6}{5}\right)$, la dérivée s'annule en changeant de signe (+; -), donc $g\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right)$ est un maximum pour g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

$$g\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right) = 5 \times e^{\ln\frac{5}{6}} - 3 \times \left(e^{\ln\frac{5}{6}}\right)^2 = 5 \times \frac{5}{6} - 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{6} - \frac{75}{12} = \frac{25}{12}.$$

La distance entre un point de la courbe \mathcal{C}_f et le point de même abscisse sur la droite \mathcal{D} est donc maximale lorsque $x = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$. Cette distance maximale vaut $\frac{25}{12}$ unités.

Remarque : Comme le repère est orthogonal (a priori pas orthonormé), il s'agit d'unité en ordonnée.)

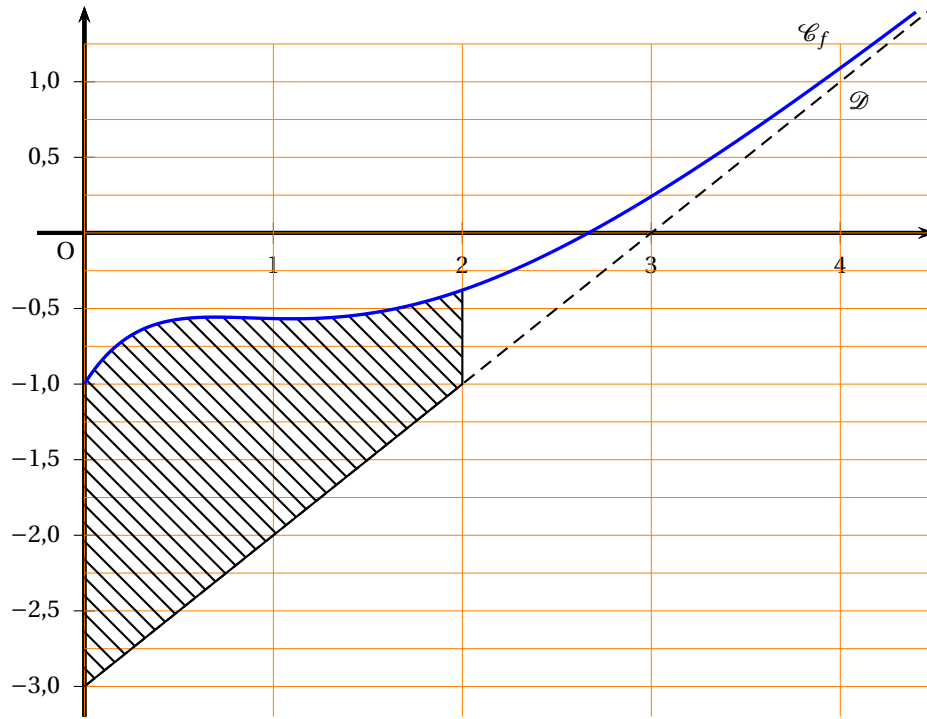
Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction \mathcal{A} définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t - 3)] dt.$$

- $\mathcal{A}(2) = \int_0^2 [f(t) - (t - 3)] dt = \int_0^2 g(t) dt$ et $g > 0$ sur $[0; 2]$. $\mathcal{A}(2)$ mesure donc (en unités d'aires) l'aire du domaine limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = 2$, la courbe \mathcal{C}_f et la droite \mathcal{D} . (voir figure page suivante)
- La fonction g est continue sur $[0; +\infty[$ et $\mathcal{A}(x) = \int_0^x g(t) dt$, la fonction \mathcal{A} est donc dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\mathcal{A}' = g > 0$. La fonction \mathcal{A} est donc bien croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- Pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \int_0^x g(t) dt \\ &= 5 \int_0^x e^{-t} dt - 3 \int_0^x e^{-2t} dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= 5 \left[-e^{-t}\right]_0^x - 3 \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x \\ &= 5(-e^{-x} + 1) - 3\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\right) \\ &= 5 - 5e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x} - \frac{3}{2} \\ \mathcal{A}(x) &= \frac{3}{2}e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{7}{2} \end{aligned}$$



4. $\mathcal{A}(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{7}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{3}{2} = 0$

On pose $X = e^{-x}$

x solution de $\frac{3}{2}e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow X$ solution de $\frac{3}{2}X^2 - 5X + \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow X$ solution de $3X^2 - 10X + 3 = 0$ équation du second degré

$\Leftrightarrow X = \frac{1}{3}$ ou $X = 3$

$\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{3}$ ou $e^{-x} = 3$

on revient à x et $X = e^{-x}$

$\Leftrightarrow x = \ln 3$ ou $x = -\ln 3$

$-\ln \frac{1}{3} = -(-\ln 3) = \ln 3$

$\Leftrightarrow x = \ln 3$

car $x \geq 0$ et $-\ln 3 < 0$

Finalement, $\mathcal{A}(x) = 2 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

Exercice 3

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

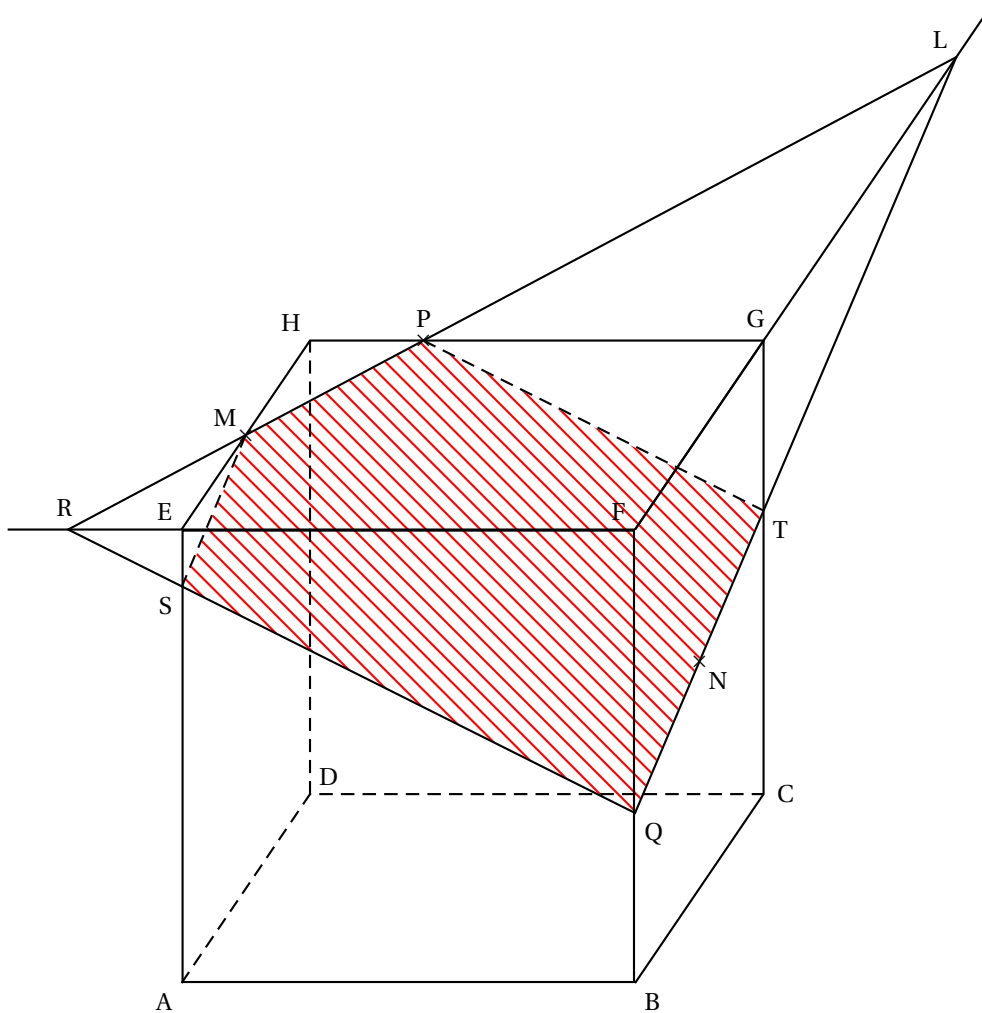
1. Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes; on appelle L leur point d'intersection.

2. a. Les droites (LN), (BF) et (CG) sont coplanaires dans le plan (BCG) d'où les constructions de T et Q.

b. On cherche l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

$$\left. \begin{array}{l} L \in (MP) \Rightarrow L \in (MNP) \\ N \in (MNP) \end{array} \right\} \Rightarrow (LN) \subset (MNP) \left. \begin{array}{l} Q \in (LN) \\ Q \in [BF] \Rightarrow Q \in (ABF) \end{array} \right\} \Rightarrow Q \in (MNP) \cap (ABF)$$

Les droites (MP) et (EF) du plan (EFG) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes; on appelle R leur point d'intersection.



$$\left. \begin{array}{l} R \in (MP) \Rightarrow R \in (MNP) \\ R \in (EF) \Rightarrow R \in (ABF) \end{array} \right\} \Rightarrow R \in (MNP) \cap (ABF)$$

Les plans (MNP) et (ABF) ont deux points en commun, Q et R ; ils ne sont pas confondus car $P \in (MNP)$ et $P \notin (ABF)$.

Ces deux plans sont donc sécants et comme Q et R appartiennent aux deux plans, l'intersection des deux plans (MNP) et (ABF) est la droite (QR) .

3. Notons S le point d'intersection de (AE) et (QR) .

La section du cube par le plan (MNP) est le pentagone $MPTQS$.

Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On a $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$ et $H(0; 1; 1)$.

1. M est le milieu du segment $[EH]$ donc M a pour coordonnées $\left(\frac{0+0}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+1}{2}\right) = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$;

N est le milieu du segment $[FC]$ donc n a pour coordonnées $\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+0}{2}\right) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

$$P(x; y; z) \text{ vérifie } \overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}, \text{ on a donc : } \begin{cases} x-0 = \frac{1}{4} \\ y-1 = 0 \\ z-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ Donc } P\left(\frac{1}{4}; 1; 1\right).$$

2. Pour calculer les coordonnées du point L , on écrit les systèmes de représentations paramétriques des droites (MP) et (FG) .

(MP) passe par $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MP}\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Une représentation paramétrique de cette droite est donc :
$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}k \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

(FG) passe par $F(1; 0; 1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{FG}(0; 1; 0)$.

Une représentation paramétrique de cette droite est donc :
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = k' \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{où } k' \in \mathbb{R}$$

On détermine l'intersection de ces deux droites :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}k = 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k = k' \\ 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k = 4 \\ k' = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Donc le point L a pour coordonnées $\left(1; \frac{5}{2}; 1\right)$.

3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1; 1; \frac{5}{8}\right)$.

On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TN}$

$$\overrightarrow{TP} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{TN} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = -\frac{3}{4} \times 0 + 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{8} \times \left(-\frac{1}{8}\right) \neq 0$$

Le triangle TPN n'est pas rectangle en T .

Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

1. « Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B. » donc

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, a_n + b_n = 2200.$$

2. Au début du $n+1$ -ième jour, la bassin A contient a_n , on ajoute 15% du volume d'eau présent dans le bassin B soit $0,15b_n$ et on enlève 10% du volume présent dans A au début de la journée :

$$a_{n+1} = a_n + 0,15b_n - 0,1a_n = a_n + 0,15(2200 - a_n) - 0,1a_n = 0,75a_n + 330 = \frac{3}{4}a_n + 330$$

On a bien, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3.

Variables	: n est un entier naturel a est un réel		
Initialisation	: Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800		
Traitement	: Tant que $a < 1100$, faire : <table style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; margin-left: 20px;"> <tr> <td>Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$</td> </tr> <tr> <td>Affecter à n la valeur $n + 1$</td> </tr> </table> Fin Tant que	Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$	Affecter à n la valeur $n + 1$
Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$			
Affecter à n la valeur $n + 1$			
Sortie	: Afficher n		

4. a. Remarque : on peut calculer les premiers termes pour avoir la raison.

Pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 1320 && \text{définition de } u_n \\ &= \frac{3}{4}a_n + 330 - 1320 && \text{question 2.} \\ &= \frac{3}{4}a_n - 990 \\ &= \frac{3}{4}(a_n - 1320) \\ &= \frac{3}{4}u_n && \text{définition de } u_n \end{aligned}$$

On reconnaît la définition d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

Son premier terme est $u_0 = a_0 - 1320 = 800 - 1320 = -520$

- b. On a donc, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 q^n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Mais, par définition de u_n , on a

$$u_n = a_n - 1320 \Leftrightarrow a_n = u_n + 1320 \text{ donc } a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Si ce jour arrive, on aura $a_n = b_n = \frac{2200}{2} = 1100$.

Il faut donc résoudre l'équation $1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100$ d'inconnue n .

$$1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100 \Leftrightarrow 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 220 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{11}{26} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{11}{26}\right)$$

$$\text{Finalement } n = \frac{\ln\left(\frac{11}{26}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 2,99$$

On vérifie : $a_3 = 1100,625$ et $b_3 = 1099,375$ donc $a_3 - b_3 = 1,25 > 1$.

Les deux bassins n'auront donc jamais le même volume d'eau, à un mètre cube près.

Exercice 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. La conservation du volume total se traduit par : pour tout entier naturel n , $a_n + b_n = 2200$.

2. D'après le texte, on peut dire que : $\begin{cases} a_{n+1} = 0,9a_n + 0,15b_n - 5 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,85b_n + 5 \end{cases}$ avec $\begin{cases} a_0 = 1100 \\ b_0 = 1100 \end{cases}$

On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins.

On donne les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul du texte :

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1100,00	1100,00
3	1	= B2 * 0.9 + C2 * 0.15 - 5	= B2 * 0.1 + C2 * 0.85 + 5
4	2	1 187,50	1 012,50
5	3	1 215,63	984,38
6

3. La suite (a_n) donnant le volume d'eau dans le bassin A semble croissante et tendre vers 1300, tandis que la suite (b_n) donnant le volume d'eau dans le bassin B semble décroissante et tendre vers 900.

Partie B

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = MX_n + R$.

1. On note $S = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$.

$$MS = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \times 1300 + 0,15 \times 900 \\ 0,1 \times 1300 + 0,85 \times 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1305 \\ 895 \end{pmatrix}$$

$$MS + R = \begin{pmatrix} 1305 \\ 895 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix} = S$$

On a $X_{n+1} = MX_n + R$ et $S = MS + R$; par soustraction membre à membre, on obtient :

$$X_{n+1} - S = MX_n + R - MS - R = MX_n - MS = M(X_n - S)$$

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n :

$$X_n - S = M^n (X_0 - S) \text{ et que } M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,75^n & 0,6 - 0,6 \times 0,75^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,75^n & 0,4 + 0,6 \times 0,75^n \end{pmatrix}$$

2. $X_0 = \begin{pmatrix} 1100 \\ 1100 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$ donc $X_0 - S = \begin{pmatrix} -200 \\ 200 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M^n \times (X_0 - S) &= \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,75^n & 0,6 - 0,6 \times 0,75^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,75^n & 0,4 + 0,6 \times 0,75^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -200 \\ 200 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (0,6 + 0,4 \times 0,75^n) \times (-200) + (0,6 - 0,6 \times 0,75^n) \times 200 \\ (0,4 - 0,4 \times 0,75^n) \times (-200) + (0,4 + 0,6 \times 0,75^n) \times 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \times 0,75^n \\ 200 \times 0,75^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } X_n = M^n \times (X_0 - S) + S = \begin{pmatrix} -200 \times 0,75^n \\ 200 \times 0,75^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 - 200 \times 0,75^n \\ 900 + 200 \times 0,75^n \end{pmatrix}$$

3. $X_n = \begin{pmatrix} 1300 - 200 \times 0,75^n \\ 900 + 200 \times 0,75^n \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} a_n = 1300 - 200 \times 0,75^n \\ b_n = 900 + 200 \times 0,75^n \end{cases}$

La suite $(0,75^n)$ est géométrique de raison $0,75$ donc est décroissante ; on multiplie par un nombre négatif, donc la suite $(-200 \times 0,75^n)$ est croissante et donc la suite (a_n) est croissante.

De plus, $-1 < 0,75 < 1$ donc la suite $(0,75^n)$ est convergente et a pour limite 0 . On peut en déduire que la suite (a_n) est convergente et a pour limite 1300 .

Pour les mêmes raisons, on peut dire que la suite (b_n) est décroissante, et convergente vers 900 .

4. On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie $1300 - a_n < 1,5$ et $b_n - 900 < 1,5$; $1300 - a_n < 1,5 \iff 1298,5 < a_n$

D'après le tableau fourni dans le texte, la plus petite valeur de n pour que le processus soit stabilisé peut être 17 ou 18 .

Pour $n = 17$, $a_{17} \approx 1298,4966$ donc $1300 - a_{17} > 1,5$.

Pour $n = 18$, $a_{18} \approx 1298,8724$ donc $1300 - a_{18} < 1,5$.

Comme $a_n + b_n = 2200$, $b_n = 2200 - a_n$ ce qui équivaut à $b_n - 900 = 1300 - a_n$; donc $1300 - a_n < 1,5 \iff b_n - 900 < 1,5$.

On peut donc dire que le processus est stabilisé à partir de $n = 18$.