

Polynésie S – correction

13 juin 2014

4 heures

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5; -5; 2), \quad B(-1; 1; 0), \quad C(0; 1; 2), \quad \text{et } D(6; 6; -1)$$

1. Nature du triangle BCD :

$$\begin{cases} BC^2 = (0 - (-1))^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 0)^2 = 5 \\ CD^2 = (6 - 0)^2 + (6 - 1)^2 + (-1 - 2)^2 = 70 \\ BD^2 = (6 - (-1))^2 + (6 - 1)^2 + (-1 - 0)^2 = 75 \end{cases} \implies BD^2 = BC^2 + CD^2 \implies \text{BCD est rectangle en C}$$

2. Son aire est : $\frac{BC \times CD}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{70}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{14}$.

a) Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) :

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times (-2) + 0 \times 3 + 2 \times 1 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{CD} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \times (-2) + 5 \times 3 + (-3) \times 1 = 0$$

Comme \vec{BC} et \vec{CD} ne sont pas colinéaires (BCD est un triangle rectangle non aplati), \vec{n} étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD), il en est un vecteur normal.

b) Équation cartésienne du plan (BCD) :

- L'équation est de la forme $-2x + 3y + z + d = 0$;
- B appartient au plan, donc $-2(-1) + 3(1) + (0) + d = 0 \iff d = -5$;
- une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x + 3y + z - 5 = 0$.

3. Représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} orthogonale au plan (BCD) (donc de vecteur directeur \vec{n}) et passant par le point A :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite \mathcal{D} et du plan (BCD).

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \\ -2x + 3y + z - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \\ -2(5 - 2t) + 3(-5 + 3t) + (2 + t) - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 - 2(2) = 1 \\ y = -5 + 3(2) = 1 \\ z = 2 + 2 = 4 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de H sont : (1; 1; 4).

5. Volume du tétraèdre ABCD :

[AH] est la hauteur du tétraèdre, car A est sur la droite \mathcal{D} orthogonale au plan (BCD) et H est l'intersection de \mathcal{D} et (BCD), donc la projection orthogonale de A sur (BCD).

$\mathcal{B} = 5\sqrt{7}$; $h = AH = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-1)^2 + (2-4)^2} = 4\sqrt{14}$; donc :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{14} \times \frac{5}{2} \sqrt{14} = \frac{140}{3}$$

6. Mesure de l'angle \widehat{BAC} :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}; AB = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{76}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; AC = \sqrt{(-5)^2 + 6^2 + (0)^2} = \sqrt{61};$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{(-6) \times (-5) + 6 \times 6 + (-2) \times 0}{\sqrt{76} \times \sqrt{61}} = \frac{66}{\sqrt{4636}} \approx 0,97 \implies \text{mes} \widehat{BAC} \approx 14,2 \text{ au dixième de degré près}$$

Exercice 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

- $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2 = 2$ et $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2 = 6$.
- Le second affiche en sortie la valeur de u_n** , la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur.
- Étude de la suite (u_n) :
 - La suite (u_n) semble être croissante.

Démonstration :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 2 - u_n = 2n + 2 > 0 \text{ pour tout } n \text{ naturel}$$

- La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n , $u_n = an^2 + bn + c$.

$$\begin{cases} u_0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \\ u_1 = a \times 1^2 + b \times 1 + c = 2 \\ u_2 = a \times 2^2 + b \times 2 + c = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + 2b = 6 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

4. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n = 2n + 2$.

- C'est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 2$.

b) On définit, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (n+1)v_0 + \frac{n(n+1)}{2} \times r = 2(n+1) + n(n+1) = (n+1)(n+2)$$

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n .

$$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) + (u_{n+1} - u_n) = u_{n+1} - u_0$$

$$S_{n-1} = u_n - u_0 \iff u_n = S_{n-1} + u_0 = n(n+1) + 0 = n(n+1)$$

Exercice 3

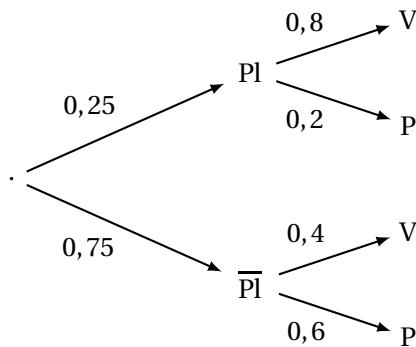
5 points

Commun à tous les candidats

- Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre. Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas. Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.

Affirmation n° 1 : VRAIE

Arbre de probabilités :



On cherche $p(V)$:

$$\begin{aligned}
 p(V) &= p(V \cap \text{Pl}) + p(V \cap \overline{\text{Pl}}) \\
 &= p_{\text{Pl}}(V) \times p(\text{Pl}) + p_{\overline{\text{Pl}}}(V) \times p(\overline{\text{Pl}}) \\
 &= 0,8 \times 0,25 + 0,4 \times 0,75 = 0,5
 \end{aligned}$$

« Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

Pl : il pleut ; V : en voiture ; P : à pied

- Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B.

Affirmation n° 2 : VRAIE

A et B sont indépendants signifie que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$:

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p(B) + p(A \cap \overline{B}) \implies p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A) \times p(B) = p(A) (1 - p(B)) = p(A) \times p(\overline{B})$$

« Si A et B sont indépendants, alors A et \overline{B} sont aussi indépendants. »

- On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,7.

Affirmation n° 3 : FAUX

$$p(T \leq 5) = \int_0^5 0,7e^{-0,7x} dx = [-e^{-0,7x}]_0^5 = 1 - e^{-0,7 \times 5} \approx 0,97$$

La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est :

$$p(T > 5) = 1 - p(T \leq 5) \approx 0,03$$

Affirmation n° 4 : FAUX

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,7} \approx 1,42$$

« Le temps d'attente moyen à ce guichet est d'environ 1 minute et demi. »

- Affirmation n° 5 : VRAIE**

La proportion de personnes de groupe sanguin A+ dans la population française est $p = 0,39$.

La taille de l'échantillon est $n = 183 \geq 30$;

$$np = 183 \times 0,39 = 71,37 \geq 5 \text{ et } n(1 - p) = 183 \times (1 - 0,39) = 111,63 \geq 5.$$

Donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 5% de la proportion de personnes ayant un groupe sanguin A+ :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,39 - 1,96 \frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}} ; 0,39 + 1,96 \frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}} \right]$$

$$I \approx [0,319 ; 0,461]$$

Or $0,34 \in I$, donc on ne peut pas rejeter, au seuil de 5%, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39% comme dans l'ensemble de la population.

Exercice 4

5 points

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Intersection de deux courbes :

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g \iff f(x) = g(x) \iff e^x = 2e^{\frac{x}{2}} - 1 \iff \begin{cases} X = e^{\frac{x}{2}} \\ X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2 = 0 \end{cases} \iff e^{\frac{x}{2}} = 1 \iff x = 0$$

Ainsi M a pour coordonnées $(0; 1)$.

$$f'(x) = e^x \implies f'(0) = 1 \quad ; \quad g'(x) = e^{\frac{x}{2}} \implies g'(0) = 1$$

En M , leurs tangentes ont, toutes deux le même coefficient directeur 1, elles ont donc même tangente Δ d'équation $y - 1 = 1(x - 0) \iff y = x + 1$.

2. Étude de la position relative de la courbe \mathcal{C}_g et de la droite Δ

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

a) Limite de la fonction h en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0$$

b) Pour tout réel x

$$x \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} - 1 - \frac{2}{x} \right) = x \times e^{\frac{x}{2}} \times \frac{2}{x} - x - x \frac{2}{x} = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 = h(x)$$

Limite de la fonction h en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} = +\infty, \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{X = \frac{x}{2} \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

c) Fonction dérivée de la fonction h sur \mathbb{R} :

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - 1 = e^{\frac{x}{2}} - 1$$

$$h'(x) > 0 \iff e^{\frac{x}{2}} > 1 \iff \frac{x}{2} > 0 \iff x > 0 \quad \text{et} \quad h'(x) < 0 \iff e^{\frac{x}{2}} < 1 \iff \frac{x}{2} < 0 \iff x < 0$$

d) Tableau de variations de la fonction h sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

e) La fonction h possède un minimum en 0 qui est 0 . Donc :

$$\forall x, x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0 \iff 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 = 2e^{\frac{x}{2}} - 1 - x - 1 \geq 0 \iff 2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$$

f) Ainsi la courbe \mathcal{C}_g se trouve au dessus de la droite d'équation $y = x + 1$ qui est la droite Δ .

3. Étude de la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g

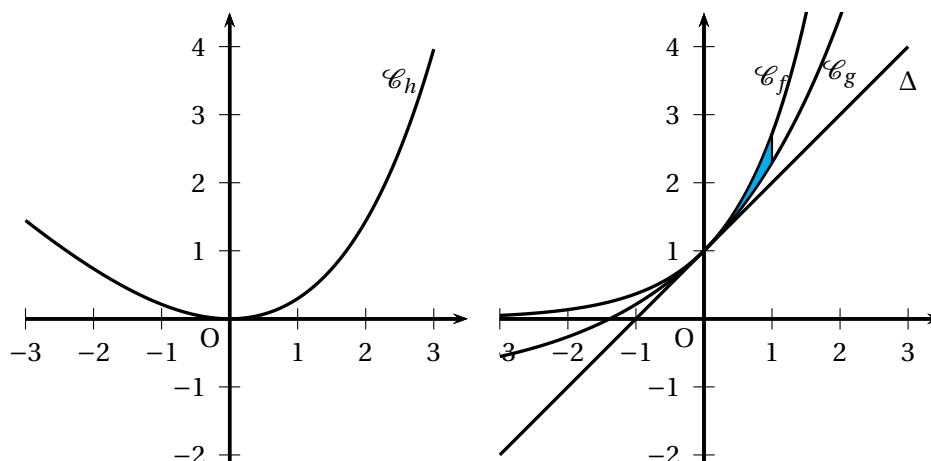
a) On a vu plus haut (question 1.) que, pour tout réel x , $(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = f(x) - g(x) \geq 0$.

b) Ainsi la courbe \mathcal{C}_f se trouve au dessus de la courbe \mathcal{C}_g .

Ainsi, $|f(x) - g(x)| = (f(x) - g(x))$.

4. Aire \mathcal{A} du domaine compris entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 e^x dx - 4 \int_0^1 \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx + \int_0^1 dx \\ &= [e^x]_0^1 - 4 [e^{\frac{x}{2}}]_0^1 + [x]_0^1 = e - 1 - 4e^{\frac{1}{2}} + 4 + 1 = e - 4\sqrt{e} + 4 \approx 0,123 \end{aligned}$$



Exercice 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Une personne née le 1^{er} août, le programme de calcul (A) donne le nombre 308 :
 - Numéro du jour de naissance multiplié par 12 : $j = 1 \times 12 = 12$;
 - Numéro du mois de naissance multiplié par 37 : $m = 8 \times 37 = 296$;
 - $m + j = 308$.
2. a) Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).

$$z = 12j + 37m, \text{ or } 12j \equiv 0 [12], \text{ donc } z = 12j + 37m \equiv 37m [12]$$

- b) Date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A) :

$$\begin{cases} z = 474 = 39 \times 12 + 6 \\ z \equiv 37m [12] \end{cases} \implies z = (3 \times 12 + 1)m \equiv 6 [12] \implies m \equiv 6 [12], \text{ le mois est donc juin}$$

$$z = 474 = 12j + 37 \times 6 \implies 12j = 474 - 37 \times 6 = 252 = 21 \times 12 \implies j = 21$$

Le spectateur est donc né un 21 juin.

Partie B

Le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m , le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

1. Première méthode :

Algorithme modifié (AlgoBox) pour qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12j + 31m = 503$.

```
1  VARIABLES
2  j EST_DU_TYPE NOMBRE
3  m EST_DU_TYPE NOMBRE
4  z EST_DU_TYPE NOMBRE
5  DEBUT_ALGORITHME
6  POUR m ALLANT_DE 1 A 12
7  DEBUT_POUR
8  POUR j ALLANT_DE 1 A 31
9  DEBUT_POUR
10 z PREND_LA_VALEUR 12*j+31*m
11 SI (z==503) ALORS
12 DEBUT_SI
13 AFFICHER j
14 AFFICHER "\ "
15 AFFICHER m
16 AFFICHER "; "
17 FIN_SI
18 FIN_POUR
19 FIN_POUR
20 FIN_ALGORITHME
***Algorithme lancé***
29\ 5;
***Algorithme terminé***
```

Le spectateur est donc né un 29 mai.

2. Deuxième méthode :

- a) $12a \equiv 0 [12]$ pour tout a entier, donc

$$z = 12j + 31m \equiv 31m = (2 \times 12 + 7)m = 12 \times 2m + 7m \equiv 7m [12]$$

$7m$ et z ont donc le même reste dans la division euclidienne par 12.

b) Pour m variant de 1 à 12, reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
reste	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	0

On remarque qu'à chacun des 12 restes possibles correspond un seul mois.

c) Date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B) :

$$\begin{cases} z = 503 = 41 \times 12 + 11 \\ z \equiv 7m \pmod{12} \end{cases} \implies 7m \equiv 11 \pmod{12} \implies m = 5, \text{ le mois est donc mai}$$

$$z = 503 = 12j + 31 \times 5 \implies 12j = 503 - 31 \times 5 = 29 \times 12 \implies j = 29$$

Le spectateur est donc né un 29 mai.

3. Troisième méthode :

a) Le couple $(-2 ; 17)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$:

$$12 \times (-2) + 31 \times (17) = 503$$

b) Un couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$:

$$\begin{cases} 12x + 31y = 503 & L_1 \\ 12 \times (-2) + 31 \times (17) = 503 & L_2 \end{cases} \implies 12(x+2) + 31(y-17) = 0 \quad (L_1 - L_2) \iff 12(x+2) = 31(17-y) \quad (E)$$

c) Résolution de l'équation $12x + 31y = 503$:

• Partie directe :

$$12x + 31y = 503 \implies \begin{cases} 12(x+2) = 31(17-y) \\ \text{pgcd}(12;31) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{GAUSS}} 31 \text{ divise } x+2$$

Ainsi, il existe un entier relatif k vérifiant $x+2 = 31k \iff x = -2 + 31k$.

En remplaçant dans (E), on obtient :

$$\begin{cases} 12(x+2) = 31(17-y) \\ x+2 = 31k \end{cases} \implies 12 \times 31k = 31(17-y) \iff 12k = 17-y \iff y = 17 - 12k$$

• Réciproque : pour tout k de \mathbb{Z} , on a :

$$12(-2 + 31k) + 31(17 - 12k) = \underbrace{12 \times (-2) + 31 \times (17)}_{503} + \underbrace{12 \times 31k - 12 \times 31k}_{0} = 503$$

• Pour tout k de \mathbb{Z} , le couple $(x; y) = (-2 + 31k; 17 - 12k)$ est solution de $12x + 31y = 503$.

d) Il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ tel que $1 \leq y \leq 12$:

$$1 \leq y \leq 12 \iff 1 \leq 17 - 12k \leq 12 \iff -16 \leq -12k \leq -5 \iff 5 \leq 12k \leq 16 \iff \frac{5}{12} \leq k \leq \frac{16}{12}$$

Ainsi $k = 1$ est l'unique entier compris entre $\frac{5}{12} \approx 0,4166$ et $\frac{16}{12} \approx 1,3333$.

L'unique couple recherché est donc : $(-2 + 31 \times 1; 17 - 12 \times 1) = (29; 5)$

Le spectateur est donc né un 29 mai.