Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2014 - S
Métropole

Série S Obli. et Spé.
Jeudi 19 juin 2014
Correction

Exercice 1. Fonctions — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a $f_1(0) = 1$ donc $\mathscr{C}_1$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

2.

- **Variations**
  La fonction f_1 est dérivable comme composée de fonctions qui le sont, on a alors :

$$\boxed{f_1'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}}$$

On obtient sans difficulté :

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,5]\,;\ \begin{cases} f'(x) = 0 & \iff x = 0 \\ f'(x) > 0 & \iff x > 0 \\ f'(x) < 0 & \iff x < 0 \end{cases}}$$

- **Pour les limites** :
  - **En $+\infty$**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0 \end{array}\right\} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$$

En $-\infty$
On factorise par x afin d'utiliser les formules du cours :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*\,;\ f_1(x) = x\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)$$

alors

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

$$* \quad (1)\ :\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty \quad \Big| \quad * \quad (2)\ :\ \lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{x} = 0 \quad \Big| \quad * \quad (3)\ :\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} = 1$$

donc en posant $X = -x$ on applique la propriété (1) :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{X}}{X} = -\infty \end{array}\right\} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$$

- **Tableau de variations**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1.

1. a. Les fonctions f_n étant positive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, l'intégrale I_n représente l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe (Ox) et les droites $\mathscr{D}$ et (Oy).

1. b. Visuellement, I_n semble décroître vers la demi-aire du carré unité, donc vers $0,5\ u.a.$.

2.

- Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x) - f_n(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - x - \mathrm{e}^{-nx}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-(n+1)x+x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right) \mathrm{d}x}$$

- **Variations**

$$\forall x \in \mathbb{R}^+\ ;\ \mathrm{e}^{x} \geq 1 \Longrightarrow 1 - \mathrm{e}^{x} \leq 0$$

On a donc

$$\forall x \in [0\ ;\ 1]\ ;\ \left(1 - \mathrm{e}^{x}\right) \leq 0$$

donc puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on à :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ \mathrm{e}^{-(n+1)x} > 0$$

On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in [0\ ;\ 1]\ ;\ \left(1 - \mathrm{e}^{x}\right) \leq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ \mathrm{e}^{-(n+1)x} > 0 \end{array}\right\} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \forall x \in [0\ ;\ 1]\ ;\ \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right) \leq 0$$

Donc d'après la propriété dite de ***positivité de l'intégrale*** :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right) \mathrm{d}x \leq 0}$$

La suite (I_n) est donc décroissante.
En outre, la suite (I_n) est positive on l'a vu à la question **B.1.** donc minorée par 0.

Pour conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est décroissante et minorée par 0 donc converge vers une limite } l \text{ avec } l \geq 0.}$$

Rappel :

Théorème 1 (Positivité de l'intégrale)

Soit deux réels a et b avec $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.
si $f(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x\,\mathrm{d}x \geq 0$

3. Déterminons I_n et la limite de la suite (I_n).

- Pour $n = 0$ on a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{\,0}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 \\ I_0 &= \frac{1}{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{2}}$$

- Pour $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ I_n &= \int_0^1 x + \mathrm{e}^{\,-nx}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{\,-nx}\right]_0^1 \\ I_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{\,-n} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{\,-n} + \frac{1}{n}}$$

- De plus on pour les limites :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ &\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,-n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\,\mathrm{e}^{\,n}} = 0 \end{aligned}\right\} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}}$$

La suite (I_n) a donc pour limite $l = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2. Probabilités — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

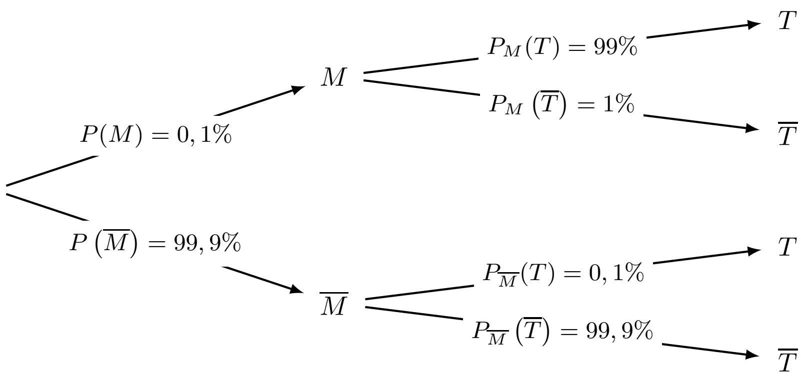
1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

1. a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

On a :

- « Le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 % » donc $P(M) = 0,1\%$;
- « La probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$ » donc $P_M(T) = 99\%$;
- « La probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$ » donc $P_{\overline{M}}(T) = 0,1\%$;



1. b. Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$p(T) = p\left(T \cap M\right) + p\left(T \cap \overline{M}\right)$$
$$p(T) = p_M(T) \times p(M) + p_{\overline{M}}(T) \times p\left(\overline{M}\right)$$
$$p(T) = 99\% \times 0,1\% + 0,1\% \times 99,9\%$$

$$\boxed{p(T) = 1,989 \times 10^{-3}}$$

1. c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse. Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

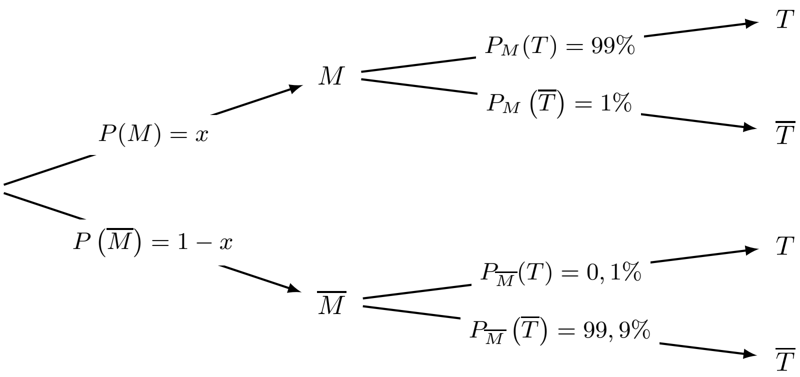
On cherche la probabilité $p_T\left(M\right)$:

$$p_T\left(M\right) = \frac{P\left(M \cap T\right)}{p(T)} = \frac{p_M(T) \times p(M)}{p(T)} = \frac{99\% \times 0,1\%}{1,989 \times 10^{-3}}$$

$$\boxed{p_T\left(M\right) = \frac{110}{221} < \frac{1}{2}}$$

Donc **l'affirmation est vraie, « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade »** .

2. **Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,95$. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.**
A partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?
Il faut donc refaire les calculs de la question précédente, **A.1.c.** avec la donnée $p(M) = x$. On a alors :



On cherche la probabilité $p_T\left(M\right)$:

$$\begin{aligned}
p_T\left(M\right) &= \frac{P\left(M \cap T\right)}{p(T)} \\
&= \frac{p_M(T) \times p(M)}{p\left(T \cap M\right) + p\left(T \cap \overline{M}\right)} \\
&= \frac{p_M(T) \times p(M)}{p_M(T) \times p(M) + p_{\overline{M}}(T) \times p\left(\overline{M}\right)} \\
p_T\left(M\right) &= \frac{99\% \times x}{99\% \times x + 0,1\% \times (1 - x)} \\
p_T\left(M\right) &= \frac{0,99x}{0,989x + 0,001}
\end{aligned}$$

On cherche donc x pour que $p_T\left(M\right) \geq 0,95$ soit :

$$p_T\left(M\right) \geq 0,95 \Longleftrightarrow \frac{0,99x}{0,989x + 0,001} \geq 0,95$$

or puisque x est positif, le dénominateur est strictement positif et

$$\begin{aligned}
p_T\left(M\right) \geq 0,95 &\Longleftrightarrow 0,99x \geq (0,989x + 0,001) \times 0,95 \\
&\Longleftrightarrow 0,05045x \geq 0.00095 \\
&\Longleftrightarrow x \geq \frac{0,00095}{0,05045} = \frac{19}{1\ \ 009}
\end{aligned}$$

$$\boxed{p_T\left(M\right) \geq 0,95 \Longleftrightarrow x \geq \frac{19}{1\ \ 009} \approx 0,0188305 \approx 1,88\%}$$

Il faut donc que $x \geq \dfrac{19}{1\ \ 009}$ pour que le laboratoire commercialise le test.

Partie B

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$, de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

1. a. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$, de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$. On cherche la probabilité qu'un comprimé soit conforme donc que sa masse X soit comprise entre 890 et 920 mg.
On cherche donc $p\,(890 \leq X \leq 900)$, la calculatrice nous donne alors arrondi à 10^{-3} près :

$$\boxed{P\,(890 \leq X \leq 920) \approx 0{,}921}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(890, 920, 900, 7) \approx 0{,}921\,298\,797\,1$$

1. b. Déterminer l'entier positif h tel que $p(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.

$$p(900 - h \leq X \leq 900 + h) \approx 0,99 \Leftrightarrow p\left(-\frac{h}{7} \leq \frac{X - 900}{7} \leq \frac{h}{7}\right) \approx 0,99$$

$$\Leftrightarrow 2p\left(\frac{X - 900}{7} \leq \frac{h}{7}\right) - 1 \approx 0,99$$

$$\Leftrightarrow 2p\left(\frac{X - 900}{7} \leq \frac{h}{7}\right) \approx 1,99$$

$$\Leftrightarrow p\left(\frac{X - 900}{7} \leq \frac{h}{7}\right) \approx 0,995$$

Or

Propriété 2

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}\,(0\ ;\ 1)$.

Donc d'après la propriété 2, la variable $Y = \dfrac{X - 900}{7}$ suit la loi normale centrée réduite donc :

$$p(900 - h \leq X \leq 900 + h) \approx 0,99 \Leftrightarrow p\left(Y \leq \frac{h}{7}\right) \approx 0,995$$

La calculatrice nous donne donc

$$\boxed{\frac{h}{7} \approx 2,5758 \Longleftrightarrow h \approx 18}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.invNorm}(0.995) \approx 2{,}575\,829\,303$$

L'entier positif h tel que $p(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0,99$ à 10^{-3} est donc h = 18.

2. La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97 % de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1 000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1 000 tirages successifs avec remise. Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé. Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

- **1. Analyse des données** :
  - « *Dans un échantillon de taille* $n = 1\,000$, *Le contrôle effectué a permis de dénombrer* 53 *comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé* ». Donc la fréquence observée de comprimés conformes est
$$f = \frac{1\ 000 - 53}{1\ 000} = 0{,}947 = \mathbf{94,7\%}$$
  - « *La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins* $\mathbf{p = 97\ \%}$ *de comprimés conformes* ».
- **2. Intervalle de fluctuation** : On va regarder si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation.

Théorème 2 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} ✓ & n \geq 30 \\ ✓ & np \geq 5 \\ ✓ & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est, si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a $n = 1\,000$, $p = 97\,\%$ alors on sait que puisque :

$$\begin{cases} ✓ & n = 1\,000 \geq 30 \\ ✓ & np = 1\,000 \times 97\% = 970 \geq 5 \\ ✓ & n(1-p) = 1\,000 \times 3\% = 30 \geq 5 \end{cases}$$

Les conditions de validité sont réunies donc l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour la fréquence $F_{1\,000}$ est :

$$I_{1\,000} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,97 - 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1\,000}}\ ;\ 0,97 + 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1\,000}}\right]$$

Les bornes de l'intervalle sont :

$$\begin{cases} p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}959\,427 & : \text{ on donne la valeur approchée par défaut au millième} \\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}980\,573 & : \text{ on donne la valeur approchée par excès au millième} \end{cases}$$

soit

$$\boxed{I_{1\,000} \approx [95,9\%\ ;\ 98,1\%]}$$

- **3. Conclusion** : La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation

$$\boxed{f = 94,7\% \notin I_{1\,000}}$$

donc **au seuil** 95%**, les réglages faits par le laboratoire ne sont pas convenables** .

Exercice 3. Complexes — 5 points

On désigne par (E) l'équation d'inconnue complexe z : $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$. Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

On peut noter (E') cette équation.

- **Calculons le discriminant de l'équation (E').**

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = -48 < 0$$

- **Solutions**
  L'équation (E') possède donc 2 solutions complexes conjuguées :

$$\boxed{\begin{cases} Z_1 = \dfrac{-4 - \mathrm{i}\sqrt{48}}{2} = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} \\ Z_2 = \overline{Z_1} = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} \end{cases}}$$

- **Forme exponentielle**
  - On a

$$|Z_1| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

  - Donc :

$$Z_1 = 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 \times (-1) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Z_1 = 4\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(-\pi)}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$Z_1 = 4\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right)}$$

$$Z_1 = 4\,\mathrm{e}^{\frac{-2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$$

- Pour conclure, une forme exponentielle des solutions de (E') est :

$$\boxed{\begin{cases} Z_1 = 4\,\mathrm{e}^{\frac{-2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}} \\ Z_2 = \overline{Z_1} = 4\,\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}} \end{cases}}$$

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$. Calculer a^2 sous forme algébrique. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

- On a

$$a = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}} = 1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3}$$

  donc

$$\boxed{a^2 = 4\,\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}} = Z_2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}}$$

- Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ sont donc a et $-a$ soit :

$$\boxed{z_1 = a = 1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = -a = -1 - \mathrm{i}\,\sqrt{3}}$$

3. Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in R$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $z = x - \mathrm{i}y$.

Démontrer que :

- **Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}$.**
  Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 on a :

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + \mathrm{i}y_1)\,(x_2 + \mathrm{i}y_2)} \\ &= \overline{(x_1x_2 + \mathrm{i}x_1y_2 + \mathrm{i}y_1x_2 - y_1y_2} \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 - \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\overline{z_1} \times \overline{z_2} &= (x_1 - \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)\\ &= x_1x_2 - y_1y_2 - \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)\\ &= \overline{z_1z_2}\end{aligned}$$

Donc pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :

$$\boxed{\overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}}$$

- **Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.**
  Procédons par récurrence :
  - **Initialisation** :
    $$\overline{z^1} = \overline{z} = (\overline{z})^1$$
    La propriété est donc vraie au rang 1.
  - **Hérédité** : Supposons la propriété vraie au rang n.
    $$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z}$$
    or d'après la propriété précédente, le conjugué du produit est le produit des conjugués donc :
    $$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n} \times \overline{z}$$
    et d'après l'hypothèse de récurrence $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ donc :
    $$\overline{z^{n+1}} = (\overline{z})^n \times \overline{z} = (\overline{z})^{n+1}$$
    La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
  - **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 1. En la supposant vraie au rang n elle est encore vraie au rang suivant. Par conséquent : pour tout entier naturel n non nul,
    $$\boxed{\overline{z^n} = (\overline{z})^n}$$

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E). En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

- Soit z une solution de (E), alors
  $$\begin{aligned}(\overline{z})^4 + 4(\overline{z})^2 + 16 &= \overline{z^4} + 4\overline{z^2} + 16\\ &= \overline{z^4 + 4z^2 + 16}\end{aligned}$$
  or z est une solution de (E) donc $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ et donc
  $$(\overline{z})^4 + 4(\overline{z})^2 + 16 = 0$$
  Donc :
  $$\boxed{\text{Si } z \text{ est une solution de l'équation (E) alors son conjugué } \overline{z} \text{ est également une solution de (E)}}$$
- Or d'après la question **1.** ;
  $$Z_2 = -2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{est solution de l'équation (E') : } Z^2 + 4Z + 16 = 0$$
  donc d'après la question **2.** :
  $$z_1 = a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } z_2 = -a = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{sont deux solutions de (E).}$$
- D'après l'étude précédente, puisque
  $$z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } z_2 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \text{ sont deux solutions de (E)}$$
  leur conjugués sont aussi des solutions de (E).
  On vérifie alors facilement que l'on obtient quatre solutions distinctes de l'équation(E).
- On admet que (E) admet au plus quatre solutions donc les solutions de (E) sont :
  $$\boxed{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\,;\ -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\,;\ -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\,;\ 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$$

Exercice 4. Obligatoire : Géométrie dans l'espace — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).

1. a. Donner les coordonnées des points D et F.
Dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$ on a :

$$\boxed{D\,(0\,;\ 0\,;\ 1)}\ \text{et}\ \boxed{F\left(\frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2}\,;\ 0\right)}$$

1. b. Donner une représentation para métrique de la droite (DF).

Un vecteur directeur de la droite (DF) est $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-1\end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de (DF) est :

$$\boxed{(DF)\ :\ \begin{cases} x = & 0,5t \\ y = & 0,5t \qquad ,\ t\in\mathbb{R} \\ z = 1-t \end{cases}}$$

1. c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Propriété 3

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal est normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{u} = 0$.

Donc d'après la propriété 3, puisque $\mathcal{P}$ passe par A et est orthogonal à la droite (DF) :

$$M(x\,;\ y\,;\ z)\in\mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{pmatrix}.\,\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-1\end{pmatrix} = 0$$
$$M(x\,;\ y\,;\ z)\in\mathcal{P} \iff 0,5x+0,5y-z=0$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par 2 on obtient :

$$\boxed{\mathcal{P}\ :\ x+y-2z=0}$$

1. d. Calculer les coordonnées du point H.
La droite (DF) est donc orthogonale au plan $\mathcal{P}$ donc elle n'est pas parallèle au plan. Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de la droite (DF) et du plan $\mathcal{P}$ on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x = \ 0,5t \\ y = \ 0,5t \\ z = 1-t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Pour cela on va injecter dans l'équation du plan les équations paramétriques de la droite.

$$0,5t + 0,5t - 2(1-t) = 0 \Longleftrightarrow 3t - 2 = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

On obtient donc pour $t = \dfrac{2}{3}$ les coordonnées du point d'intersection H : $\boxed{H\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)}$.

1. e. Démontrer que l'angle $\widehat{\text{EHG}}$ est un angle droit.

On a $E\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$, $G\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $H\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ donc :

$$\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{6}\\ \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{3}\end{pmatrix} . \overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{-1}{6}\\ \dfrac{1}{3}\end{pmatrix} = \frac{-1}{18} + \frac{-1}{18} + \frac{1}{9} = 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont orthogonaux et **l'angle $\widehat{\text{EHG}}$ est un angle droit**.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\,\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$. Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

2. a. Démontrer que $ME^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.

Avec $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ et $D\,(0\,;\,0\,;\,1)$, on a $\overrightarrow{DM} = t\,\overrightarrow{DF}$ donc :

$$\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z-1\end{pmatrix} = t\,\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}0,5\\ 0,5\\ -1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = & 0,5t\\ y = & 0,5t\\ z = 1-t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \boxed{M\left(\frac{1}{2}t\,;\,\frac{1}{2}t\,;\,1-t\right)}$$

On est dans un repère orthonormé donc le calcul de distances avec les formules usuelles est légitime. Avec $E\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$:

$$ME^2 = \left(\frac{1}{2} - 0,5t\right)^2 + (0,5t)^2 + (-1+t)^2$$
$$ME^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^2 + t^2 - 2t + 1$$

Donc

$$\boxed{ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}}$$

2. b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M. En déduire que $ME\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

- De même on a puisque $G\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$:

$$MG^2 = (0 - 0,5t)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0,5t\right)^2 + (-1+t)^2$$
$$MG^2 = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + t^2 - 2t + 1$$

Donc

$$\boxed{MG^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4} = ME^2}$$

Les distances ME et MG sont donc égales et **le triangle MEG est isocèle en M**.

- On appelle K le milieu du segment [EG]. On a alors :

$$\boxed{EK = \frac{EG}{2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

- MEG étant isocèle en M, la droite (EK) est hauteur, médiane, médiatrice et bissectrice issue de M dans ce triangle. Puisque c'est la bissectrice issue de M on a :

$$\widehat{EMK} = \frac{1}{2}\,\widehat{EMG} = \frac{\alpha}{2}$$

- Puisque c'est aussi la hauteur issue de M on a dans le triangle EMK rectangle en K :

$$\sin\widehat{EMK} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{EK}{EM}$$

soit

$$\boxed{ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = EK}$$

- On en déduit donc que :

$$\boxed{ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

2. c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal. En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

- Si $x \in [0\ ;\ \pi]$, alors $\frac{x}{2} \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et donc par croissance de la fonction $x \longmapsto \sin\frac{x}{2}$ sur cet intervalle :

$$\boxed{\alpha \text{ est maximale si et seulement si } \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ est maximal.}}$$

- On a montré que le produit de ME par $\sin\frac{x}{2}$ était constant et égal à $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ à la question précédente, de ce fait :

$$\boxed{\alpha \text{ est maximale} \iff \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{ME} \text{ maximal} \iff ME \text{ est minimal.}}$$

- La croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction carrée permet alors de conclure que :

$$\boxed{\alpha \text{ est maximale si et seulement si } ME^2 \text{ est minimal.}}$$

2. d. Conclure.

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$ est une fonction carrée de la forme $f(t) = at^2 + bt + c,\quad a > 0$, qui admet donc un minimum en

$$\boxed{t = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{5}{2}}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{5}{6} = t_S}$$

- On a montré lors de la question **2.a.** que le point M était de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,t\ ;\ \frac{1}{2}\,t\ ;\ 1-t\right)$.

La position du point M pour que α soit maximale est donc, pour $t = t_S$, le point $M\left(\frac{1}{2}\,t_S\ ;\ \frac{1}{2}\,t_S\ ;\ 1-t_S\right)$ soit

$$\boxed{M\left(\frac{5}{12}\ ;\ \frac{5}{12}\ ;\ \frac{1}{6}\right)}$$

Exercice 4. Spécialité : Matrices — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :
Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.
En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1. Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2.

- En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.
- Or tous les ans :
  - « *Il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B De plus il achète* 100 *poissons pour le bassin B* »
    On a donc $b_1 = a_0 + 100 = 300$
  - « *la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A. Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus* 200 *poissons pour le bassin A.* »
    On a donc $a_1 = 2b_0 + 200 = 2 \times 100 + 200 = 400$
- Donc :

$$\boxed{\begin{cases} b_1 = 300 \\ a_1 = 400 \end{cases}} \quad \text{et de même} \quad \boxed{\begin{cases} b_2 = a_1 + 100 = 500 \\ a_2 = 2b_1 + 200 = 800 \end{cases}}$$

2. On a A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

2. a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.

- D'après ce qui précède :
  - « *Il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B De plus il achète* 100 *poissons pour le bassin B* »
    On a donc
    $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ b_{n+1} = a_n + 100}$$
  - « *la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A. Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus* 200 *poissons pour le bassin A.* »
    On a donc
    $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ a_{n+1} = 2b_n + 200}$$
- Or pour tout entier n,

$$AX_n + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n + 200 \\ a_n + 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ X_{n+1} = AX_n + B}$$

2. b. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + 200 \\ x + 100 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x - 2y &= 200 \\ -x + y &= 100 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \iff \begin{cases} x &= -400 \\ y &= -300 \end{cases}}$$

2. c. Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$. Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = AY_n$.

On rappelle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ b_{n+1} = a_n + 100 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = 2b_n + 200$$

Pour tout entier naturel

$$AY_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n + 600 \\ a_n + 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2b_n + 200) + 400 \\ (a_n + 100) + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ AY_n = Y_{n+1}}$$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2 Z_n$.
En déduire que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = 2Z_n$.

- Pour tout entier naturel

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= Y_{2(n+1)} = Y_{2n+2} \\ &= Y_{(2n+1)+1} \end{aligned}$$

or $\forall p \in \mathbb{N}\ ;\ AY_p = Y_{p+1}$ donc pour $p = 2n+1$ on a

$$Z_{n+1} = AY_{2n+1}$$

or $\forall p \in \mathbb{N}\ ;\ AY_p = Y_{p+1}$ donc pour $p = 2n$ on a

$$Z_{n+1} = A^2 Y_{2n} = A^2 Z_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ Z_{n+1} = A^2 Z_n}$$

- De plus le carré de la matrice A est égale à deux fois la matrice identité, $A^2 = 2\,I$ donc on a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ Z_{n+1} = 2Z_n}$$

3. b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n, $Y_{2n} = 2^n Y_0$.
En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$.
Puis démontrer que pour tout entier naturel n, $a_{2n} = 600 \times 2^n - 400$ et $a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400$.

- On a pour tout entier n :

$$Y_{2n+1} = AY_{2n}$$

or $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ Y_{2n} = 2^n Y_0$ donc

$$\begin{aligned} Y_{2n+1} &= A\left(2^n Y_0\right) \\ Y_{2n+1} &= 2^n \times \left(AY_0\right) \\ Y_{2n+1} &= 2^n \times Y_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ Y_{2n+1} = 2^n Y_1}$$

- Pour résumer on a montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ :\ \begin{cases} Y_{2n} &= 2^n Y_0 \\ Y_{2n+1} &= 2^n Y_1 \end{cases}}$$

- Alors pour les termes de rang pair :

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 600 \\ \\ 400 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad Y_{2n} = \begin{pmatrix} a_{2n} + 400 \\ \\ b_{2n} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 600 \\ \\ 400 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \,;\; a_{2n} = 600 \times 2^n - 400}$$

- Alors pour les termes de rang impair :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 800 \\ \\ 600 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad Y_{2n+1} = \begin{pmatrix} a_{2n+1} + 400 \\ \\ b_{2n+1} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 800 \\ \\ 600 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \,;\; a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400}$$

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.

4. a. On donne l'algorithme suivant.

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Traitement :	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
Sortie :	Afficher a.

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

- Si p est pair alors il existe un entier k tel que $p = 2k$ par conséquent, dans l'algorithme, $n = \dfrac{2k}{2} = k$ et on calcule alors $a_{2k} = a_p$ d'après la question précédente puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N} \,;\; a_{2n} = 600 \times 2^n - 400$$

- Si p est impaire alors il existe un entier k tel que $p = 2k + 1$ par conséquent, dans l'algorithme, $n = \dfrac{2k+1-1}{2} = k$ et on calcule $a_{2k+1} = a_p$ d'après la question précédente puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N} \,;\; a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400$$

- L'algorithme permet donc le calcul de la **population du bassin A au début de la $(p+1)^{\text{ème}}$ année ou après p années**.

En début de $1^{\text{ère}}$ année	$a_0 = 200$	
En début de $2^{\text{ème}}$ année	$a_1 = 400$	donc après 1 an
En début de $3^{\text{ème}}$ année	$a_2 = 800$	donc après 2 ans
En début de $4^{\text{ème}}$ année	$a_3 = 1\,200$	donc après 3 ans
En début de $5^{\text{ème}}$ année	$a_4 = 2\,000$	donc après 4 ans
En début de $6^{\text{ème}}$ année	$a_5 = 2\,800$	donc après 5 ans
En début de $7^{\text{ème}}$ année	$a_6 = 4\,400$	donc après 6 ans
En début de $8^{\text{ème}}$ année	$a_7 = 6\,000$	donc après 7 ans
En début de $9^{\text{ème}}$ année	$a_8 = 9\,200$	donc après 8 ans
En début de $10^{\text{ème}}$ année	$a_9 = 12\,400$	donc après 9 ans

4. b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Affecter à p la valeur 0
	Affecter à a la valeur 200
Traitement :	Tant que $a \leq 10\,000$
	p prend la valeur $p+1$
	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher a.

L'algorithme donne alors la valeur 9.

Avec algobox on obtient :

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
p EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  a PREND_LA_VALEUR 200
  p PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (a<=10000) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    p PREND_LA_VALEUR p+1
    SI (p%2==0) ALORS
      DEBUT_SI
      n PREND_LA_VALEUR p/2
      a PREND_LA_VALEUR 600*pow(2,n)-400
      FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      n PREND_LA_VALEUR (p-1)/2
      a PREND_LA_VALEUR 800*pow(2,n)-400
      FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER p
FIN_ALGORITHME
```

On rappelle que :

En début de 1$^{\text{ère}}$ année	$a_0 = 200$	
En début de 2$^{\text{ème}}$ année	$a_1 = 400$	donc après 1 an
En début de 3$^{\text{ème}}$ année	$a_2 = 800$	donc après 2 ans
En début de 4$^{\text{ème}}$ année	$a_3 = 1\,200$	donc après 3 ans
En début de 5$^{\text{ème}}$ année	$a_4 = 2\,000$	donc après 4 ans
En début de 6$^{\text{ème}}$ année	$a_5 = 2\,800$	donc après 5 ans
En début de 7$^{\text{ème}}$ année	$a_6 = 4\,400$	donc après 6 ans
En début de 8$^{\text{ème}}$ année	$a_7 = 6\,000$	donc après 7 ans
En début de 9$^{\text{ème}}$ année	$a_8 = 9\,200$	donc après 8 ans
En début de 10$^{\text{ème}}$ année	$a_9 = 12\,400$	donc après 9 ans

Le pisciculteur pourra utiliser le bassin A jusqu'à au début de la 9$^{\text{ème}}$ année. Donc pendant 9 années si on considère que la capacité du bassin sera dépassée au début de l'année suivante .