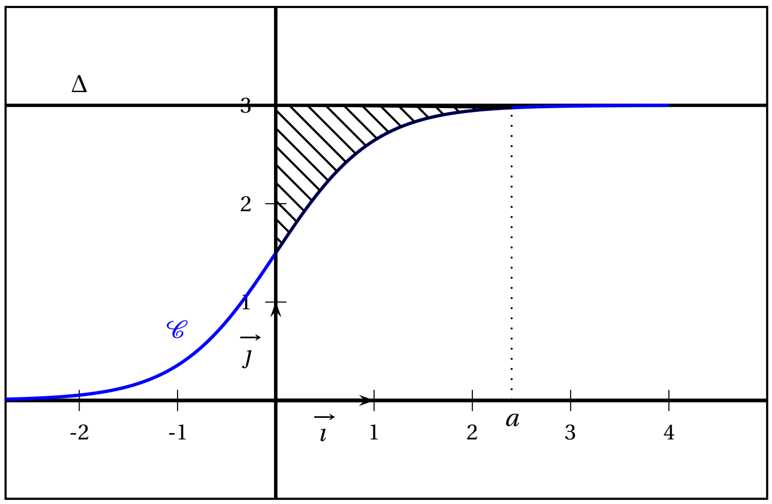
Corrigé du baccalauréat S Pondichéry
17 avril 2015

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A



1. On sait que $e^{-2x} > 0$ quel que soit le réel x, donc $1 + e^{-2x} > 1 > 0$. Le dénominateur étant non nul, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle la fonction étant de la forme $\dfrac{3}{u(x)}$, avec $u(x) = 1 + e^{-2x}$, donc $u'(x) = -2e^{-2x}$ on a :
$f'(x) = -\dfrac{3u'(x)}{(1+u(x))^2} = -\dfrac{3\times(-2)e^{-2x}}{\left(1+e^{-2x}\right)^2} = \dfrac{6e^{-2x}}{\left(1+e^{-2x}\right)^2} > 0$ car quotient de deux nombres supérieurs à zéro. la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme le laisse supposer le graphique).
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et en posant $X = -2x$, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, d'où
$\lim\limits_{X\to-\infty} 1 + e^X = 1$ et enfin par quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$: ceci montre que la droite (Δ) d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
3. Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante de $f(0) = \dfrac{3}{1+1} = 1,5$ à 3 : il existe donc un réel unique $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2,999$.
La calculatrice donne :
$f(4) \approx 2,99899$ et $f(5) \approx 2,9999$, donc $4 < \alpha < 5$;
$f(4,0) \approx 2,99899$ et $f(4,1) \approx 2,9992$, donc $4,0 < \alpha < 4,1$;
$f(4,00) \approx 2,99899$ et $f(4,01) \approx 2,99901$, donc $4,00 < \alpha < 4,01$. (encadrement à 10^{-2} près.

Partie B

1. On a vu dans la partie A que $0 < f(x) < 3 \iff -f(x) < 0 < 3 - f(x)$, soit $h(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$H'(x) = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{-2\text{e}^{-2x}}{1+\text{e}^{-2x}} = \dfrac{3\text{e}^{-2x}}{1+\text{e}^{-2x}} = \dfrac{3\text{e}^{-2x}+3-3}{1+\text{e}^{-2x}} = \dfrac{3\text{e}^{-2x}+3}{1+\text{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\text{e}^{-2x}} = \dfrac{3\left(\text{e}^{-2x}+1\right)}{1+\text{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\text{e}^{-2x}} = 3 - f(x) = h(x)$.
Donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. a. On a vu que sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur l'intervalle $[0~;~a]$ (avec $a >$), la fonction h est positive, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\text{d}x$ est égale en unités d'aire à la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de h, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

Mais comme $h(x) = 3 - f(x)$, cette surface est la surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ (voir l'aire hachurée ci-dessus.

b. D'après la question **B. 2.**, on a :
$\displaystyle\int_0^a h(x)\,\text{d}x = [H(x)]_0^a = H(a) - H(0) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+\text{e}^{-2\times a}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(1+\text{e}^{-2\times 0}\right) = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln\left(1+\text{e}^{-2\times a}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\text{e}^{-2a}}\right)$.

c. D'après la question précédente, on sait que l'aire de $\mathscr{D}_a$, surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ est égale à $\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\text{e}^{-2x}}\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-2x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\text{e}^{-2x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+\text{e}^{-2x}}\right) = 2$, donc finalement par composition, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\text{e}^{-2x}}\right) = \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1,04$ (u. a.)

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{b}{1-a} = au_n + b - \dfrac{b}{1-a} = au_n + \dfrac{b(1-a)-b}{1-a} = au_n - a\dfrac{b}{1-a} = a\left[u_n - \dfrac{b}{1-a}\right] = av_n$.
L'égalité $v_{n+1} = av_n$, vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. On sait que $v_n = v_0 \times a^n$; donc si $a \in]-1~;~1[$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$, donc
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n - \frac{b}{1-a}$ soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$.

Partie B

1. Après la taille la plante mesure $80 \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = 80 \times \dfrac{3}{4} = 60$ (cm). Au bout de 1 an elle a poussé de 30 cm ; elle mesurera donc en mars 2016 avant la tailles $60 + 30 = 90$ cm.

2. a. D'une année sur l'autre, tailler le quart revient à multiplier par $\dfrac{3}{4} = 0,75$ et la pousse annuelle est de 30 cm, donc :
$h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

b. Mars 2015 correspondant à $n = 0$, on a : $h_0 = 80$; $h_1 = 90$,
$h_2 = 0,75 \times 90 + 30 = 67,5 + 30 = 97,5$: la suite semble être croissante.
Initialisation : on sait déjà que $h_0 < h_1$;
Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $h_p < h_{p+1}$, alors
$0,75h_p < 0,75h_{p+1} \iff 0,75h_p + 30 < 0,75h_{p+1} + 30 \iff h_{p+1} < h_{p+2}$: l'hérédité est démontrée, donc la suite (h_n) est croissante.

c. Si la suite (h_n) converge vers ℓ, par continuité l'égalité :
$h_{p+1} = 0,75h_p + 30$ donne en passant aux limites à l'infini :
$\ell = 0,75\ell + 30 \iff 0,25\ell = 30 \iff \ell = 120$.
La plante aura donc une taille inférieure à 120 cm. (À la calculatrice $h_{20} \approx 119,873$ cm).

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

1. **a.** Par symétrie $P(104 \leqslant X) = 0,16$ et donc $P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - 2 \times 0,16 = 1 - 0,32 = 0,68$.

   b. On vient donc de trouver que $P(\mu - 20 \leqslant X \leqslant \mu + 20) = 0,68$: donc $\mu \approx 20$.

2. **a.** La variable Z est centrée et réduite : elle suit donc une loi normale centrée réduite.

   b. On part de $P(X \leqslant 64) = 0,16$, d'où $P(X \leqslant 64) = P(X - 84 \leqslant -20) = P\left(\dfrac{X-84}{\sigma} \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right) = P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right)$.
   Finalement $P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0,16$

   c. Le résultat précédent entraîne que $-\dfrac{20}{\sigma} \approx -0,994\,5 \iff \sigma \approx \dfrac{20}{0,994\,5}$ soit $\sigma \approx 20,111$ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.

   a. Il faut trouver :
   $P(24 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0,115$ (calculatrice)

   b. On a $P(X \geqslant 120) = 0,5 - P(84 \leqslant X \leqslant 120) \approx 0,037$.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

1. **a.** Si G est la variable aléatoire donnant le nombre de clients ayant pris l'extension de garantie, puisque les tirages sont indépendants et de même probabilité 0,115, G suit une loi binomiale $\mathcal{B}(12,\ 0,115)$.
   La probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie est égale à :
   $P(G = 3) = \binom{12}{3} \times 0,115^3 \times (1 - 0,115)^9 \approx 0,111\,4$ soit 0,111 au millième près.

   b. On a $P(G \geqslant 6) = 1 - P(G \leqslant 5) \approx 0,001$ au millième près.

2. • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65 - 399 = -334$;
   • Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65

a. • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65-399=-334$;
• Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65.
La variable aléatoire Y prend donc deux valeurs 65 et -334 avec les probabilités respectives 0,885 et 0,115.

b. On a $\text{E}(Y)=65\times 0,885+(-334)\times 0,115=19,115\approx 19,12$ €au centime près. L'offre est donc avantageuse pour l'entreprise puisque celle gagne presque 20 € par client.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Dans le repère $\left(\text{A}~;~\overrightarrow{\text{AB}},~\overrightarrow{\text{AD}},~\overrightarrow{\text{AE}}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $\text{M}\left(1~;~1~;~\dfrac{3}{4}\right)$, $\text{N}\left(0~;~\dfrac{1}{2}~;~1\right)$, $\text{P}\left(1~;~0~;~-\dfrac{5}{4}\right)$.

1. Voir la figure à la fin.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$. $\overrightarrow{\text{MN}}\left(-1~;~-\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{\text{MP}}\,(0~;~-1~;~-2)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$ ne sont pas colinéaires, les droites (MN) et (MP) ne sont pas parallèles donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. **a.** $-1\times 0+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times(-1)+\left(\dfrac{1}{4}\right)\times(-2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$

b. L'algorithme 1 calcule le produit scalaire $\overrightarrow{\text{MN}}\cdot\overrightarrow{\text{MP}}=0$, donc les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires : le triangle MNP est donc rectangle en M.

4.

5. **a.** Si n est un vecteur normal au plan (MNP) une équation de celui-ci est :
$5x-8y+4z=d$, avec $d\in\mathbb{R}$;
$\text{N}\in(\text{MNP})\iff -8\times\dfrac{1}{2}+4\times 1=d=\iff 0=d$
Une équation cartésienne du plan (MNP) est donc $5x-8y+4z=0$.

b. On traduit la relation vectorielle : $M(x~;~y~;~z)\in\Delta\iff\overrightarrow{\text{F}M}=t\vec{n},\,t\in\mathbb{R}$ soit

$$\left\{\begin{array}{rcl}x-1&=&5t\\y-0&=&-8t\\z-1&=&4t\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&1+5t\\y&=&-8t\\z&=&1+4t\end{array}\right.$$

6. **a.** Les coordonnées de K vérifient l'équation du plan et l'équation paramétrique de Δ, soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl}5x-8y+4z&=&0\\x&=&1+5t\\y&=&-8t\\z&=&1+4t\end{array}\right.\Rightarrow 5(1+5t)-8\times(-8t)+4(1+4t)=0\iff$$

$105t+9=0\iff t=-\dfrac{9}{105}\iff t=-\dfrac{3}{35}$.

D'où $x=1+5\times\left(-\dfrac{3}{35}\right)=1-\dfrac{3}{7}=\dfrac{4}{7}$;

$y=-8\times\left(-\dfrac{3}{35}\right)=\dfrac{24}{35}$;

$z=1+4\times\left(-\dfrac{3}{35}\right)=1-\dfrac{12}{35}=\dfrac{23}{35}$.

Donc $\text{F}\left(\dfrac{4}{7}~;~\dfrac{24}{35}~;~\dfrac{23}{35}\right)$.

b. Puisque (FK) est orthogonale au plan MNP, [FK] est hauteur du tétraèdre MNPF, donc

$V_{\text{MNPF}} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}(\text{MNP} \times \text{FK})$.

Or MNP est rectangle en M, donc $\mathscr{A}(\text{MNP} = \dfrac{\text{MN} \times \text{MP}}{2}$.

$\text{MN}^2 = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{21}{16} \Rightarrow \text{MN} = \dfrac{\sqrt{21}}{4}$;

$\text{MP}^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \text{MP} = \sqrt{5}$;

Donc $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{21}}{4} \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{\dfrac{27}{35}} = \dfrac{1}{24} \times \sqrt{\dfrac{21 \times 27}{35}} \times \sqrt{5} =$

$\dfrac{1}{24} \times \sqrt{\dfrac{81}{5}} \times \sqrt{5} = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Voir le cours.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.

a. Si 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$, comme 3 et 4 sont premiers entre eux, d'après le **1.** 12 devrait diviser $2^{33} - 1$ ce qui est contradictoire avec ce que dit l'élève : il a donc tort.

b. 2^{33} est un naturel pair donc $2^{33} - 1$ est impair donc 4 ne peut le diviser.

c. $2 \equiv -1 \quad [3] \Rightarrow 2^3 \equiv (-1)^3 \quad [3] \iff 2^3 \equiv -1 \quad [3] \Rightarrow \left(2^3\right)^{11} \equiv (-1)^{11} \quad [3] \iff$ $2^{33} \equiv -1 \quad [3]$ ce qui montre que 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

d. $S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \cdots + \left(2^3\right)^{10}$;

$2^3 S = 2^3 + 2^4 + \left(2^3\right)^3 + \left(2^3\right)^3 + \cdots + \left(2^3\right)^{11}$, d'où par différence :

$7S = \left(2^3\right)^{11} - 1 \iff S = \dfrac{\left(2^3\right)^{11} - 1}{7}$.

e. S est une somme d'entiers naturel donc est un entier naturel ; le résultat précédent montre que $\left(2^3\right)^{11} - 1$ est donc un multiple de 7.

Finalement $2^{33} - 1$ est divisible par 7.

3. $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$.

Ce nombre n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 (dans la division reste 1), ni par 11 (dans la division reste 7), ni par 13 (dans la division reste 10) et comme $13^2 = 169$, il est inutile de continuer : 127 est premier.

4. a. Comme on vient de le voir pour 127, l'algorithme cherche le reste de la division de $2^{33} - 1$ par les naturels 2, 3, 4, etc., $k \leqslant \sqrt{2^n - 1}$ tant que le reste est non nul.

Or on a vu que le nombre $2^{33} - 1$ est divisible par 7, donc l'algorithme va afficher ce diviseur 7 et « CAS 2 ».

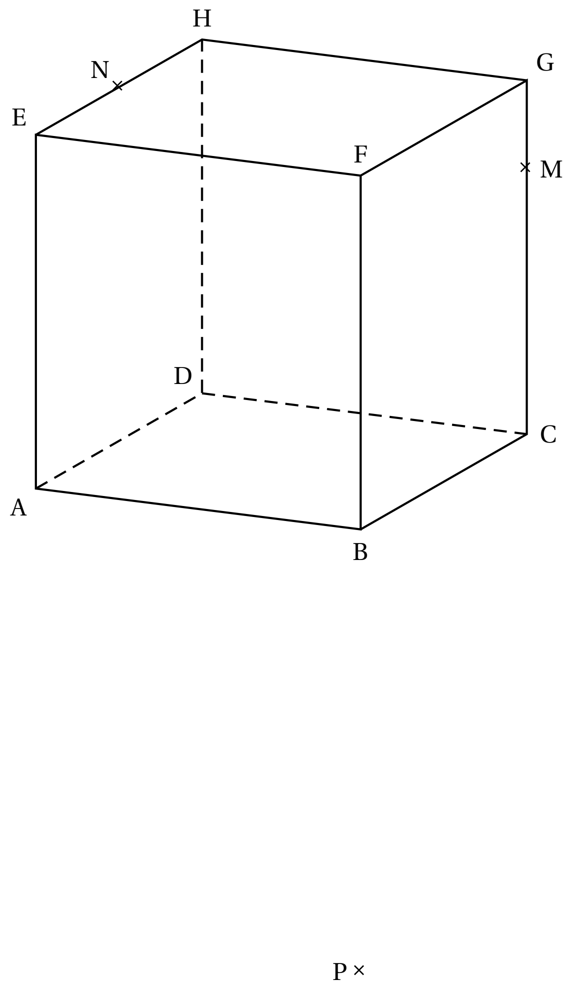
Si on entre $n = 7$, l'algorithme affiche 12 et « CAS 1 ».

b. Le cas 2 concerne donc les nombres de Mersenne non premiers et le nombre k est le plus petit de ses diviseurs (différent de 1).

c. Le CAS 1 concerne les nombres Mersenne premier comme $2^7 - 1$.

ANNEXE à remettre avec la copie

EXERCICE 4 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
l prend la valeur $d^2 + e^2 + f^2$
m prend la valeur $g^2 + h^2 + i^2$
Si $k = 0$ et si $l = m$
    Afficher : « Le triangle MNP est rectangle isocèle en M »
Sinon Afficher : « Le triangle MNP n'est pas rectangle ou n'est pas isocèle en M »