Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2015 - S Pondichéry

Série S Obli. et Spé.
17 Avril 2015
Correction

Math93.com : Annales et corrigé du Bac S - Dates et corrigés du bac S 2015

Exercice 1. Fonction — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+\text{e}^{-2x}}$. La courbe représentative de f est $\mathscr{C}$ et Δ la droite d'équation $y = 3$.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- **f est définie sur $\mathbb{R}$**
  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc le numérateur est non nul car somme de deux termes strictement positifs. la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- **f est dérivable sur $\mathbb{R}$**
  La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.
- **Calcul de la dérivée**
  La fonction f est de la forme $3\,\dfrac{1}{v}$ donc de dérivée $3\,\dfrac{-v'}{v^2}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) = 3\,\frac{1}{v(x)} \quad : \quad \begin{cases} v(x) = 1+\text{e}^{-2x} \\ v'(x) = -2\ \text{e}^{-2x} \end{cases}$$

  On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 3\,\frac{-v'(x)}{(v(x))^2}$$
$$f'(x) = 3\,\frac{2\ \text{e}^{-2x}}{(1+\text{e}^{-2x})^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \frac{6\,\text{e}^{-2x}}{(1+\text{e}^{-2x})^2}}$$

- **Signe de la dérivée**
  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est strictement positive sur cet intervalle comme quotient de deux termes positifs (strictement).
  La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la droite Δ est asymptote à $\mathscr{C}$.

On a :

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-2x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\text{e}^{-2x} = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1+\text{e}^{-2x}} = 3$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3 \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - 3 = 0}$$

$$\boxed{\text{La droite } \Delta \text{ est asymptote à } \mathscr{C} \text{ en } +\infty.}$$

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

- **Calculons la limite en $-\infty$**
  On a :

$$\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \ \mathrm{e}^{-2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ 1 + \mathrm{e}^{-2x} = +\infty \end{array}\right\} \underset{\text{Par quotient}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = 0$$

  Donc

$$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$$

  On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	2.999	$\nearrow$ 3

- **Application du TVI**

Théorème 1 (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche).

  – La fonction f est **continue** (car dérivable) et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$;
  – L'image par f de $\mathbb{R}$ est $]0\ ;\ 3[$ d'après le tableau de variations et le calcul des limites aux bornes.
  – Le réel $k = 2,999$ appartient à l'intervalle image car $0 < 2,999 < 3$

  Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = k = 2,999$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

- **Encadrement de α**
  Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  Avec un pas de $\Delta = 0,01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(4) & \approx & 2,99899 < 2,999 \\ f(4,01) & \approx & 2,99901 > 2,999 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \boxed{4 < \alpha < 4,01}$$

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
On a montré que l'image par f de $\mathbb{R}$ est $]0\ ;\ 3[$ d'après le tableau de variations et le calcul des limites aux bornes, de ce fait :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) < 3$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ 3 - f(x) > 0}$$

La fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\text{e}^{-2x}\right)$. Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont.

La fonction H est de la forme $-\dfrac{3}{2}\ln u$ donc de dérivée $-\dfrac{3}{2}\dfrac{u'}{u}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ H(x) = -\frac{3}{2}\ln u(x) \quad : \quad \begin{cases} u(x) = 1+\text{e}^{-2x} \\ u'(x) = -2\ \text{e}^{-2x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad H'(x) = -\frac{3}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$$
$$H'(x) = -\frac{3}{2}\frac{-2\ \text{e}^{-2x}}{1+\text{e}^{-2x}}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ H'(x) = \frac{3\ \text{e}^{-2x}}{1+\text{e}^{-2x}}}$$

Or

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ h(x) = 3 - f(x)$$
$$h(x) = 3 - \frac{3}{1+\text{e}^{-2x}}$$
$$h(x) = \frac{3\left(1+\text{e}^{-2x}\right)-3}{1+\text{e}^{-2x}})$$
$$h(x) = \frac{3\ \text{e}^{-2x}}{1+\text{e}^{-2x}}$$

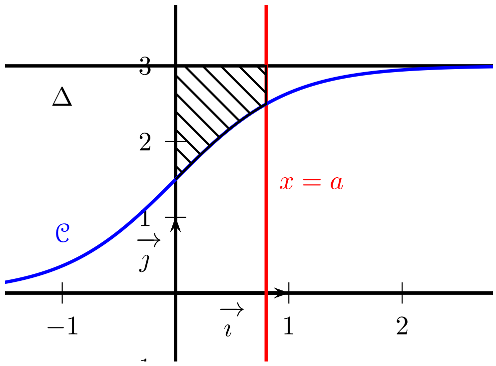
D'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ H'(x) = \frac{3\ \text{e}^{-2x}}{1+\text{e}^{-2x}} = h(x)}$$

La fonction <u>H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$</u>.

3. Soit a un réel strictement positif.

3. a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\text{d}x$.



- **Intégrabilité**
  La fonction h est **continue** sur $\mathbb{R}$ donc intégrable (au sens de Riemann) sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$, à fortiori sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.
- **Aire avec h**
  D'après la question **B.1.**, la fonction h est de plus **positive** sur $\mathbb{R}$, à fortiori sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.
  L'intégrale sur $[0\ ;\ a]$ de h représente donc <u>l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine</u> délimité par :
  - les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$;
  - L'axe des abscisses ;
  - la courbe $\mathscr{C}_h$.
- **Aire avec $\mathscr{C}$ et Δ**
  Par définition de la fonction h, pour tout x réel $h(x) = 3 - f(x)$.
  Donc on peut écrire que pour a réel strictement positif :

$$\int_0^a h(x)\,\text{d}x = \int_0^a (3 - f(x))\,\text{d}x = 3a - \int_0^a f(x)\,\text{d}x$$

  L'intégrale sur $[0\ ;\ a]$ de h représente donc <u>l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine D</u> délimité par :
  - les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$;
  - La droite Δ ;
  - la courbe $\mathscr{C}_f$.

$$\boxed{\int_0^a h(x)\,\text{d}x \text{ représente l'aire du domaine compris entre } D \text{ et } \mathscr{C}_f \text{ et les deux droites verticales d'équation } x = 0 \text{ et } x = a.}$$

3. b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

On a montré que H était une primitive de h sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel a strictement positif on a :

$$\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \Big[H(x)\Big]_0^a$$
$$\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = H(a) - H(0)$$
$$\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\ \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2a}\right) + \frac{3}{2}\ \ln\left(1+\mathrm{e}^{0}\right)$$
$$\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ \left(\ln 2 - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2a}\right)\right)$$

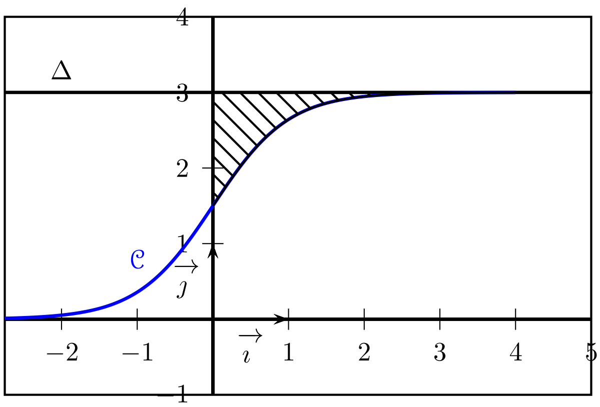
Or pour a et b strictement positifs on a : $\ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b}$ soit :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ \int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)}$$

3. c. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan défini par

$$\begin{cases} x & \geqslant \ 0 \\ f(x) \ \leqslant y & \leqslant 3 \end{cases}$$

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.



L'aire du domaine cherché, notée $\mathscr{A}_{\mathcal{D}}$ représente l'aire du domaine compris entre D et $\mathscr{C}_f$ sur le demi-plan d'équation $x \geq 0$.
D'après ce qui précède, cela correspond à :

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$$

Donc

$$\mathscr{A}_{\mathcal{D}} = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty} \frac{3}{2}\ \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$$

Or

$$\left.\begin{array}{|l} \displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-2a} = 0 \\ \displaystyle\lim_{a\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-2a} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}} = 2 \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right) = \ln 2$$

Donc

$$\boxed{\mathscr{A}_{\mathcal{D}} = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln 2}$$

Exercice 2. 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier tenue u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation $u_{n+1} = au_n + b$ (avec a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$). On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\,;\ v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} \\
v_{n+1} &= a\,u_n + b - \frac{b}{1-a} \\
v_{n+1} &= a\,u_n + \frac{b(1-a)-b}{1-a} \\
v_{n+1} &= a\,u_n - \frac{ab}{1-a} \\
v_{n+1} &= a\left(u_n - \frac{\frac{ab}{1-a}}{a}\right) \\
v_{n+1} &= a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) \\
v_{n+1} &= a\,v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une <u>suite géométrique</u> de raison $q = a$, et de premier terme v_0 avec $v_0 = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$. Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 &= v_0 \\ v_{n+1} &= a \times v_n \end{cases} \ ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

- **Exprimons v_n en fonction de n**

  La suite (v_n) est géométrique de raison $q = a$, et de premier terme $v_0 = v_0$ donc son terme général est

  $$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ v_n = v_0 \times (q)^n$$

  Soit

  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ v_n = v_0 \times (a)^n}$$

- **Exprimons u_n en fonction de n**

  De l'égalité $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ définie pour tout entier n, on peut en déduire l'expression de $u_n = v_n + \dfrac{b}{1-a}$ soit :

  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ u_n = v_0 \times (a)^n + \frac{b}{1-a}}$$

- **Limite**

  Par théorème

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < q = a < 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} v_0 \times (a)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-a}}$$

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

Puisqu'il coupe un quart de sa hauteur, il reste trois quart de la hauteur initiale, à laquelle on ajoute la pousse de 30 cm ce qui donne en mars 2016 :

$$\boxed{80 \text{ cm} \times \frac{3}{4} + 30 = 90 \text{ cm}}$$

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n)$

2. a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

Pour n entier naturel, on se place à l'année de rang $(n+1)$ soit en $(2015+n+1)$.
Puisqu'il coupe un quart de sa hauteur, il reste trois quart de la hauteur de l'année précédente soit

$$0,75\ h_n$$

A laquelle on ajoute la pousse de 30 cm ce qui donne la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n+1)$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ h_{n+1} = 0,75\ h_n + 30}$$

2. b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n) .
Démontrer cette conjecture par récurrence.

- **Conjecture**.
  Pour cela on peut présenter un tableau de valeurs :

n	0	1	2	3	...	10	...	20	...	30
h_n	80	90	97,5	103,125	...	$\approx 117,75$	...	$\approx 119,87$	...	$\approx 119,99$

  On peut conjecturer que <u>la suite est strictement croissante</u>.

- **Démonstration**
  Notons pour tout entier naturel n le postulat

$$(P_n) : h_{n+1} > h_n$$

  - **Initialisation**
    Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$h_1 = 90 > h_0 = 80$$

  - **Hérédité**
    Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.
    On suppose donc que pour n entier fixé (P_n) soit vérifié

$$(P_n) : h_{n+1} > h_n$$

    Alors pour n entier :

$$h_{n+2} - h_{n+1} = 0,75\ h_{n+1} + 30 - (0,75\ h_n + 30)$$
$$h_{n+2} - h_{n+1} = 0,75\ (h_{n+1} - h_n)$$

    Or par hypothèse de récurrence,

$$(P_n) : h_{n+1} - h_n > 0$$

    donc

$$h_{n+2} - h_{n+1} = 0,75\ (h_{n+1} - h_n) > 0$$

    et le postulat est bien vérifié au rang $(n+1)$.

– **Conclusion**
On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} > h_n}$$

La suite (h_n) est croissante.

2. c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

- **Conjecture**
Le tableau de valeurs de la question **2.b.** incite à penser que la suite (h_n) converge vers 120.
- **Démonstration**
On va appliquer les résultats obtenus lors de la **partie A**.
On rappelle les notations :
(u_n) la suite définie par son premier tenue u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b$$

(avec a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$). Il suffit donc ici de poser pour n entier :

$$u_n = h_n\ ;\ a = 0,75 \neq 1\ ;\ b = 30 \text{ et } u_0 = h_0 = 80$$

On a montré lors de la question **A.2.** que la suite (u_n), et donc (h_n), était convergente puisque

$$a = 0,75 \in]-1\ ;\ 1[$$

Sa limite est alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} h_n = \frac{b}{1-a} = \frac{30}{1-0,75} = 120}$$

La suite (h_n) converge vers 120.

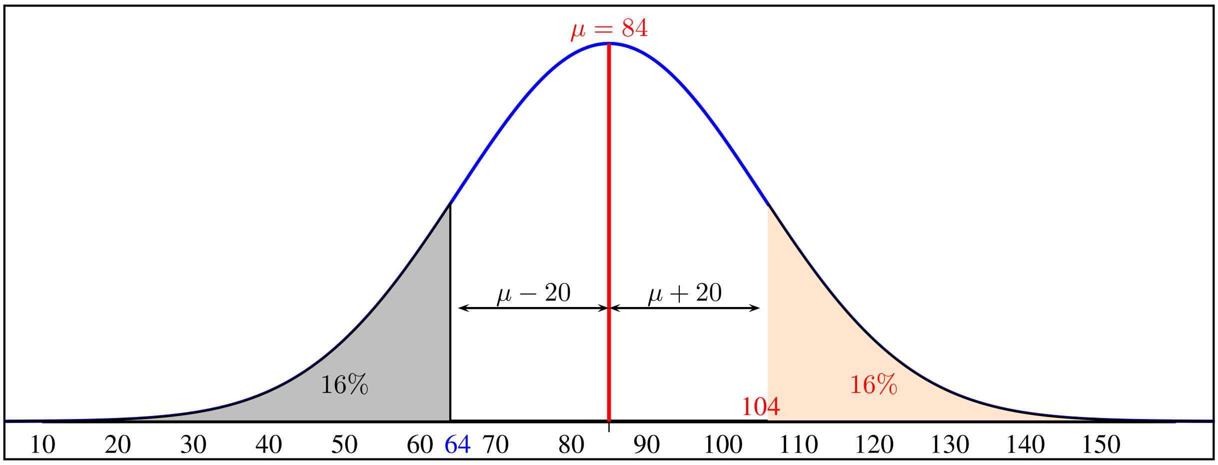
Exercice 3. 6 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1.

1. a. En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leq X \leq 104)$.
Puisque X suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 84$ on a :

$$P(64 \leq X \leq 104) = P(\mu - 20 \leq X \leq \mu + 20)$$

D'après le cours et avec les données de l'exercice :

$$1 = P(x \leq 64) + P(64 \leq X \leq 104) + P(x \geq 104) \qquad (1)$$
$$P(X \leq 64) = P(X \leq \mu - 20) = P(X \geq \mu + 20) = P(X \geq 104) = 16\% \qquad (2)$$

De ce fait en utilisant la relation 1 avec $\mu = 84$:

$$\boxed{P(64 \leq X \leq 104) = 1 - 2 \times P(X \leq 64) = 68\%}$$

1. b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?
On va appliquer la propriété des intervalles dite :

Propriété 1 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\right) \approx 0,683 \qquad (3)$$
$$P\left(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\right) \approx 0,954 \qquad (4)$$
$$P\left(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\right) \approx 0,997 \qquad (5)$$

On a donc ici d'après la relation 3 de la propriété 1 :

$$P\left(84 - \sigma \leq X \leq 84 + \sigma\right) \approx 0,683$$

Or d'après la question **A.1.a.**

$$P(64 < X < 104) = P(\mu - 20 < X < \mu + 20) = 68\%$$

Donc par identification :

$$\left.\begin{vmatrix} P\left(84-\sigma \leq X \leq 84+\sigma\right) \approx 0,683 \\ P(64 < X < 104) = 68\% \end{vmatrix}\right\} \underset{\text{par identification}}{\Longrightarrow} \quad 84-\sigma \approx 64$$

Soit

$$\boxed{\sigma \approx 20}$$

2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X-84}{\sigma}$.

2. a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
On a posé :

$$Z = \frac{X-84}{\sigma} = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

où X suit la loi normale d'espérance $\mu = 84$ et d'écart-type σ.
On a donc centré et réduit la variable X qui suit une loi normale.
La variable aléatoire Z ainsi obtenue suit donc une loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

2. b. Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

$$P(X \leqslant 64) = P\left(X-84 \leqslant 64-84\right)$$
$$P(X \leqslant 64) = P\left(\frac{X-84}{\sigma} \leqslant \frac{-20}{\sigma}\right)$$

Donc

$$\boxed{P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \frac{-20}{\sigma}\right)}$$

2. c. En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.
Puisque La variable aléatoire Z ainsi obtenue suit donc une loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0,1)$ on a :

$$P\left(Z \leqslant \frac{-20}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{-20}{\sigma}\right) = 0,16$$

La calculatrice nous donne :

$$\frac{-20}{\sigma} \approx -0{,}994\,457\,89$$

Soit arrondi au millième

$$\boxed{\sigma \approx \frac{20}{0{,}994\,457\,89} \approx 20,111}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.invNorm}(0.16) \approx -0{,}994\,457\,890\,742$$

3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.

3. a. Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.
La variable aléatoire X modélise la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle. La probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans correspond donc à la probabilité que X soit compris entre 24 mois et 60 mois. La probabilité cherchée, arrondie au millième, est alors :

$$\boxed{P\left(24 \leq X \leq 60\right) \approx 0,115}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(24, 60, 84, 20.1) \approx 0{,}114\,815\,591\,521$$

3. b. Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.
La probabilité cherchée est $P(X > 120)$, or d'après le cours :

Propriété 2

Si X suit une loi $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$, alors pour $a > \mu$:

$$P(X > a) = 0,5 - P(\mu < X < a)$$

Donc ici puisque $a = 120 > \mu = 84$ on a :

$$P(X > 120) = 0,5 + P(84 < X < 120)$$

La calculatrice donne, arrondi au millième :

$$\boxed{P(X > 120) \approx 0{,}037}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$0.5 - \text{TIStat.normFDR}(84, 120, 84, 20.1) \approx 0{,}036\,643\,003\,542$$

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.
L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.
Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).

1. a. Quelle est la probabilité qu' exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.

- **Modélisation**
  Soit X la $v.a.$ qui désigne le nombre de clients faisant jouer la garantie.
  Vérifions les hypothèses de validation d'une loi binomiale :
  - Un client qui prend l'extension de garantie a **2 états** : il fait jouer l'extension de garantie ou pas. La probabilité qu'il la fasse jouer est :
  $$p = 11,5\% = 0,115$$
  - Il y a 12 « tirages ». Chaque tirage est **indépendant, identique et aléatoire**.

  De ce fait, la variable aléatoire X qui désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière indépendante, de 12 épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 0,115$.

  $$\boxed{X \text{ suit donc une loi binomiale de paramètres } n = 12 \text{ et } p = 0,115.}$$

  $$\boxed{X \backsim \mathscr{B}(12\ ;\ 0,115)}$$

- **Calcul**
  On cherche pour $X \backsim \mathscr{B}(12\ ;\ 0,115)$ la probabilité :

  $$P(X = 3) = \binom{12}{3} \times 0,115^3 \times (1 - 0,115)^{12-3}$$

  Soit arrondi au millième :

  $$\boxed{P(X = 3) \approx 11,1\%}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.binomDdP}(12, 0.115, 3) \approx 0{,}111\,430\,899\,985$$

1. b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.

La probabilité cherchée arrondie au millième est :

$$\boxed{P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0,1\%}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$1 - \text{TIStat.binomFdR}(12, 0.115, 5) \approx 0{,}001\,151\,097\,96$$

2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

2. a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.

Il y a deux possibilités :

- le client ne fait pas jouer l'extension de garantie et l'entreprise gagne donc 65 euros ;
- ou le client fait jouer l'extension de garantie et l'entreprise perd $399 - 65 = 334$ euros.

La $v.a.$ Y représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise donc Y prend bien deux valeurs 65 et -334.
Or on sait qu'il y a $11,5\%$ de chance que le client fasse jouer l'extension de garantie.
La loi de probabilité de Y est donc :

k	65	-334
$P(Y = k)$	$P(Y = 65) = 1 - 0,115 = 0,885$	$P(Y = -334) = 0,115$

2. b. Cette offre d'extension de garantie est -elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

L'espérance de gain pour l'entreprise est :

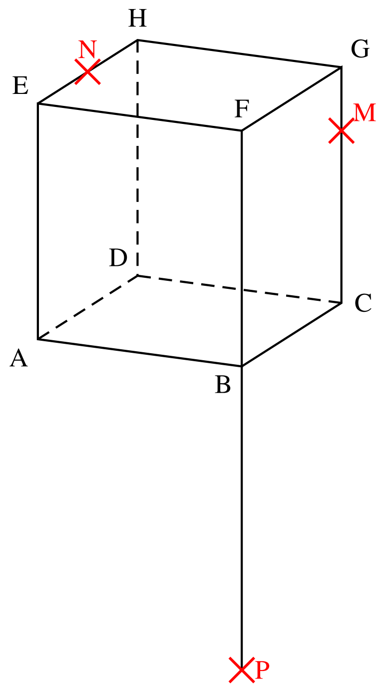
$$E(Y) = 65 \times 0,885 + (-334) \times 0,115 = 19,115 > 0$$

L'espérance de gain est donc positive, d'environ 19,11 euros ce qui est avantageux pour l'entreprise.

Exercice 4. Obligatoire — 5 points

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.



Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1 et dans le repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$, les points M, N et P :

$$\text{M}\left(1 ; 1 ; \frac{3}{4}\right), \text{N}\left(0 ; \frac{1}{2} ; 1\right), \text{P}\left(1 ; 0 ; -\frac{5}{4}\right).$$

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$. En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.. On a :

$$\boxed{\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}} \text{ et } \boxed{\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont clairement pas proportionnelles.

$$\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-0.5}$$

Les points M, N et P ne sont donc pas alignés.

3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe.

3. a. Exécuter à la main cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci- dessus.

d prend la valeur $x_{\text{N}} - x_{\text{M}}$	$d = 0 - 1 = -1$
e prend la valeur $y_{\text{N}} - y_{\text{M}}$	$e = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$
f prend la valeur $z_{\text{N}} - z_{\text{M}}$	$f = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
g prend la valeur $x_{\text{P}} - x_{\text{M}}$	$g = 1 - 1 = 0$
h prend la valeur $y_{\text{P}} - y_{\text{M}}$	$h = 0 - 1 = -1$
i prend la valeur $z_{\text{P}} - z_{\text{M}}$	$i = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = -2$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$	$k = -1 \times 0 - \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{4} \times (-2) = 0$

La valeur affichée est $\boxed{k = 0}$.

3. b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

La valeur affichée k correspond au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = k = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{MP}$$

Les deux vecteurs sont orthogonaux donc le triangle MNP est rectangle en M.

4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.

```
Saisir x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P
d prend la valeur x_N − x_M
...
k prend la valeur d × g + e × h + f × i
mn prend la valeur d^2 + e^2 + f^2
mp prend la valeur g^2 + h^2 + i^2
Si mn = mp et k = 0
   alors afficher « le triangle est rectangle et isocèle en M »
Sinon
   Afficher « le triangle n'est pas rectangle et isocèle en M »
Fin Si
```

Remarque : dans cet algorithme, $mn = MN^2$ et $mp = MP^2$.

5. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\,(5\ ;\ -8\ ;\ 4)$ normal au plan (MNP).

5. a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

Propriété 3

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal est normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{u} = 0$.

Donc d'après la propriété 3 :

$$Q(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (MNP) \Longleftrightarrow \overrightarrow{NQ}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-\dfrac{1}{2} \\ z-1 \end{pmatrix}\ .\ \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$Q(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (MNP) \Longleftrightarrow 5x + \left(y - \frac{1}{2}\right) \times (-8) + (z-1) \times 4 = 0$$

$$Q(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (MNP) \Longleftrightarrow 5x - 8y + 4 + 4z - 4 = 0$$

$$\boxed{(ABC)\ :\ 5x - 8y + 4z = 0}$$

5. b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

La droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ est alors l'ensemble des points Q tels que $\overrightarrow{FQ}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{n}$.
Le point F étant de coordonnées $(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ on a alors :

$$\Delta = \left\{ Q(x\ ;\ y\ ;\ z)\ ;\ \overrightarrow{FQ}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = t\,\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}\quad,\quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\boxed{\Delta\ :\ \begin{cases} x = \ \ 5t+1 \\ y = -8t \\ z = \ \ 4t+1 \end{cases}\quad,\quad t \in \mathbb{R}}$$

6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

6. a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\ ;\ \frac{24}{35}\ ;\ \frac{23}{35}\right)$.

La droite Δ a pour vecteur directeur, un vecteur normal au plan (MNP). Elle est donc orthogonale au plan (MNP) et de ce fait, n'est pas parallèle au plan. Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de la droite Δ et du plan (MNP) on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} 5x - 8y + 4z = 0 \\ x = \quad 5t + 1 \\ y = -8t \\ z = \quad 4t + 1 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Pour cela on va injecter dans l'équation du plan les équations paramétriques de la droite.

$$5(5t+1) - 8(-8t) + 4(4t+1) = 0 \iff 105t + 9 = 0 \iff t = -\frac{3}{35}$$

On obtient donc pour $t = -\frac{3}{35}$ les coordonnées du point d'intersection K :

$$\boxed{K\left(\frac{4}{7}\ ;\ \frac{24}{35}\ ;\ \frac{23}{35}\right)}$$

6. b. On donne FK $= \sqrt{\frac{27}{35}}$. Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

Remarque : On est placé dans un RON., le calcul de longueur avec les formules usuelles est légitime.

On a montré que la droite Δ était perpendiculaire au plan (MNP) en K. Le point F appartenant par construction à Δ, on en conclut que (FK) est la hauteur issue de F, du tétraèdre MNPF.
On a donc :

$$\mathcal{V}(MNPF) = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}(MNP) \times FK$$

Le triangle MNP étant rectangle en M on a :

$$\mathcal{A}(MNP) = \frac{MN \times MP}{2}$$

Or

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Longrightarrow MN = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{4}$$

$$\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow MP = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

On obtient alors :

$$\mathcal{A}(MNPF) = \frac{1}{3} \times \frac{\frac{\sqrt{21}}{4} \times \sqrt{5}}{2} \times \sqrt{\frac{27}{35}}$$

$$\mathcal{A}(MNPF) = \frac{\sqrt{21} \times \sqrt{5} \times \sqrt{27}}{24 \times \sqrt{35}}$$

$$\mathcal{A}(MNPF) = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7} \times \sqrt{5} \times 3\sqrt{3}}{24 \times \sqrt{7} \times \sqrt{5}}$$

Soit, exprimée en unités de volume :

$$\boxed{\mathcal{A}(MNPF) = \frac{3}{8}}$$

Exercice 4. Spécialité — 5 points

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés nombres de Mersenne.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que PGCD$(b\ ;\ c) = 1$.
Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que : *si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a.*

Théorème 3 (Carl Friedrich Gauss (1777-1855))

Soit a, b, c des entiers.

$$\text{Si } \begin{cases} a \text{ divise le produit } bc \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{cases} \text{, alors } a \text{ divise } c.$$

On a d'après les données :

- « b divise a » : donc il existe un entier k tel que $a = kb$;
- « c divise a » : donc il existe un entier k' tel que $a = k'c$;

Soit

$$\left| \begin{array}{ll} a & = kb \\ a & = k'c \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{kb = k'c}$$

- Puisque $kb = k'c$ alors b divise $k'c$ (puisqu'il divise kb) et est premier avec c, donc d'après le *théorème de Gauss*, b divise k'.
- De de fait, puisque b divise k', il existe un entier d tel que $k' = db$.
- D'où

$$a = k'c = (dbc) = d(bc)$$

Donc le produit bc divise a.

On a montré que :

$$\boxed{(P_1) : \text{Si } b \text{ divise } a \text{ et } c \text{ divise } a \text{ alors le produit } bc \text{ divise } a}$$

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$. Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$(2^{33} - 1) \div 3$	2863311530
$(2^{33} - 1) \div 4$	2147483648
$(2^{33} - 1) \div 12$	715827883,6

Il affirme que 3 divise $(2^{33} - 1)$ et 4 divise $(2^{33} - 1)$ et 12 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

2. a. En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question 1. ?

On va appliquer la propriété démontrée à la question **1.**, que nous noterons (P_1) avec

$$a = \left(2^{33} - 1\right) \; ; \; b = 3 \; \text{ et } \; c = 4$$

Ici, si l'on suppose que :

$$\left| \begin{array}{l} b = 3 \text{ divise } a = \left(2^{33} - 1\right) \\ c = 4 \text{ divise } a = \left(2^{33} - 1\right) \\ PGCD(b \; ; \; c) = PGCD(3 \; ; \; 4) = 1 \end{array} \right\} \underset{\text{D'après } (P_1)}{\Longrightarrow} \text{alors le produit } bc = 12 \text{ divise } a = \left(2^{33} - 1\right)$$

Or il affirme que 12 ne divise pas $a = \left(2^{33} - 1\right)$. Cette affirmation contredit donc le résultat démontré à la question **1.**

2. b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $\left(2^{33} - 1\right)$.

- Il est clair que 4 divise 2^{33} car $2^{33} = 2^2 \times 2^{31} = 4 \times 2^{31}$.
- Si 4 divisait $\left(2^{33} - 1\right)$, puisqu'il divise 2^{33}, il diviserait aussi 1 ce qui est faux.
- En conclusion :

$$\boxed{4 \text{ ne divise pas } \left(2^{33} - 1\right).}$$

2. c. En remarquant que $2 \equiv -1 \quad [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $\left(2^{33} - 1\right)$.

Propriété 4 (Compatibilité avec les opérations)

Soit m un entier $m \geq 2$ et a, b, a', b' des entiers.

- (1) : Si $a \equiv b \quad [m]$ et $a' \equiv b' \quad [m]$, alors $a + a' \equiv b + b' \quad [m]$
- (2) : Si $a \equiv b \quad [m]$ et $a' \equiv b' \quad [m]$, alors $a + a' \equiv b + b' \quad [m]$
- (3) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $a \equiv b \quad [m]$, alors $a^n \equiv b^n \quad [m]$

On va appliquer l'affirmation (3) de la propriété 4 avec $n = 33$, $a = 2$ et $b = -1$.
Puisque $2 \equiv -1 \quad [3]$ alors d'après la propriété, en passant à la puissance $n = 33$:

$$2^{33} \equiv (-1)^{33} \quad [3]$$

Soit

$$2^{33} \equiv -1 \quad [3]$$

Et en ajoutant (-1) de chaque côté :

$$2^{33} - 1 \equiv -2 \quad [3]$$

Or puisque $-2 \equiv -2 + 3 \quad [3] \equiv 1 \quad [3]$

$$\boxed{2^{33} - 1 \equiv 1 \quad [3]}$$

Ce qui prouve que :

$$\boxed{3 \text{ ne divise pas } \left(2^{33} - 1\right).}$$

2. d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \cdots + \left(2^3\right)^{10}$.

La somme cherchée est la somme des 11 premiers termes d'une suite géométrique de raison 2^3 et de premier terme 1. D'après le cours on a donc :

$$\boxed{S = 1 \times \frac{1 - \left(2^3\right)^{11}}{1 - \left(2^3\right)} = \frac{2^{33} - 1}{7}}$$

2. e. En déduire que 7 divise $\left(2^{33} - 1\right)$.

La somme S est un nombre entier puisque c'est la somme de 11 entiers naturels. De fait, puisque $S = \dfrac{2^{33} - 1}{7}$

$$\boxed{\text{L'entier 7 divise } \left(2^{33} - 1\right).}$$

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ? Justifier.

On a :

$$2^7 - 1 = 127$$

On cherche si il est divisible par les nombres premiers inférieurs à sa racine carrée $\sqrt{127} \approx 11,3$.

- 127 n'est pas divisible par : 2, 3, 5, 7, 11.
- On s'arrête car le nombre premier suivant, 13, est supérieur à $\sqrt{127} \approx 11,3$.

Donc $\underline{2^7 - 1 = 127 \text{ est premier}}$.

4. On donne l'algorithme suivant où MOD$(N,\ k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k.

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3
	k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
	Affecter à k la valeur 2.
Traitement :	Tant que MOD$(2^n - 1,\ k) \neq 0$ et $k < \sqrt{2^n - 1}$
	Affecter à k la valeur $k + 1$
	Fin de Tant que.
Sortie :	**Afficher** k.
	Si $k > \sqrt{2^n - 1}$
	Afficher « CAS 1 »
	Sinon
	Afficher « CAS 2 »
	Fin de Si

4. a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

n	$n = 33$	$n = 7$
Affichage 1	7	12
Affichage 2	CAS 2	CAS 1

4. b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

Le test « MOD $(2^n - 1,\ k) \neq 0$ » consiste à tester si le reste de la division euclidienne de $(2^n - 1)$ par k est non nul, donc si k ne divise pas $(2^n - 1)$.

La structure itérative TANT QUE va donc tourner tant qu'elle n'a pas trouvé un entier k (avec $k > 1$), diviseur de $2^n - 1$ et inférieur à sa racine carrée.

Le « CAS 2 » signifie alors que le nombre de Mersenne $(2^n - 1)$ n'est pas premier car on a trouvé et affiché un nombre k, plus petit diviseur de $2^n - 1$ (et strictement supérieur à 1).

Dans l'exemple précédent **4.a.**, pour $n = 33$, l'algorithme affiche 7. Or 7 est bien, d'après la l'exercice, plus petit diviseur de $2^{33} - 1$, supérieur à 1.

4. c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?

Le CAS 1 indique que le nombre de Mersenne est premier.

Donc l'exemple précédent **4.a.**, pour $n = 7$, l'algorithme affiche CAS 1, ce qui est conforme au résultat de la question **3.** qui a montré que $2^7 - 1$ était premier.

- Fin du devoir -