Corrigé du baccalauréat S Liban 27 mai 2015

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a)** De $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}~;~0~;~0\right)$, $\mathrm{J}\left(0~;~\frac{1}{2}~;~1\right)$ et $\mathrm{K}\left(1~;~\frac{1}{2}~;~0\right)$, on déduit :

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left(-\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}~;~1\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}\,(1~;~0~;~-1)$.

D'autre part $\overrightarrow{\mathrm{FD}}\,(-1~;~1~;~-1)$ et :

$\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$ et $\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{JK}} = -1+1=0$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) est normal à ce plan.

b) D'après la question précédente : $M(x~;~y~;~z)\in(\mathrm{IJK}) \iff -x+y-z+d=0$.

En particulier $\mathrm{I}\in(\mathrm{IJK}) \iff -\frac{1}{2}+d=0 \iff d=\frac{1}{2}$.

Donc $M(x~;~y~;~z)\in(\mathrm{IJK}) \iff -x+y-z+\frac{1}{2}=0 \iff x-y+z-\frac{1}{2}=0$.

2. On a $M(x~;~y~;~z)\in(\mathrm{FD}) \iff$ il existe $t\in\mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\mathrm{F}M}=t\overrightarrow{\mathrm{FD}} \iff$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-1 &=& -t\\ y-0 &=& t\\ z-1 &=& -t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1-t\\ y &=& t\\ z &=& 1-t\end{array}\right..$$

3. $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à (FK) et à (IJK) si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite et celle du plan soit :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1-t\\ y &=& t\\ z &=& 1-t\\ x-y+z-\frac{1}{2} &=& 0\end{array}\right. \Rightarrow 1-t-t+1-t-\frac{1}{2}=0 \iff -3t+\frac{3}{2}=0 \iff t=\frac{1}{2}.$$

D'où les coordonnées de $M\left(\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}\right)$.

4. $\mathrm{IJ}^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2=\frac{6}{4}$; de même $\mathrm{IK}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2=\frac{2}{4}$ et $\mathrm{JK}^2=1^2+0^2+1^2=2$.

Or $\frac{6}{4}+\frac{2}{4}=2 \iff \mathrm{IJ}^2+\mathrm{IK}^2=\mathrm{JK}^2$ égalité qui montre d'après la réciproque du théorème de Pythagore que le triangle IJK est rectangle en I.

L'aire du triangle (IJK) est donc égale à :

$\mathscr{A}(\mathrm{IJK})=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{IJ}\times\mathrm{IK}=\dfrac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. $\mathscr{V}(\mathrm{FIJK})=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\mathrm{IJK})\times\mathrm{F}M$.

$\mathrm{F}M^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\Rightarrow \mathrm{F}M=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\mathscr{V}(\mathrm{FIJK})=\dfrac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{8}$.

6. Vérifions si $\mathrm{L}\left(1~;~1~;~\frac{1}{2}\right)$ appartient au plan IJK :

$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ est vraie, donc les quatre loints I, J, K et L sont coplanaires.

Vérifions si (IJ) est parallèle à (KL) :

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left(-\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}~;~1\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{KL}}\left(0~;~\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}\right)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites coplanaires (IJ) et (KL) sont sécantes.

EXERCICE 2 **6 points**

1. Sur $[0~;~1]$, $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$, donc une primitive sur cet intervalle de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ est $x \longmapsto \ln(1+x)$. D'où :

$u_0 = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$

2. a) Par linéarité de l'intégrale :

$u_{n+1}+u_n = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{x^n(x+1)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}.$

b) La relation précédente donne pour $n=0$,

$u_1 + u_0 = 1 \iff u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln 2.$

3. a) • Il faut initialiser la suite à $u_0 = \ln 2$.

• La relation $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$ s'écrit au rang précédent, soit pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n + u_{n-1} = \dfrac{1}{n}$, soit $u_n = -u_{n-1} + \dfrac{1}{n}$.

Pour passer d'un terme à l'autre il faut donc prendre l'opposé du terme précédent et ajouter $\frac{1}{n}$. D'où l'algorithme :

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur $\ln 2$
Traitement :	Pour i variant de 1 à n
	| Affecter à u la valeur $-u+\frac{1}{i}$
	FindePour
Sortie :	Afficher u

b) Conjecture : il semble que la suite (u_n) soit décroissante vers zéro.

4. a) Pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}-x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

Or on a vu que sur $[0\,;1]$, $1+x>0$, $\quad x^n \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x-1 \leqslant 0$, donc finalement $\dfrac{x^n(x-1)}{1+x} \leqslant 0$.

Conclusion : l'intégrale de cette fonction négative sur $[0\,;1]$ est négative.

Or $u_{n+1} - u_n < 0$ quel que soit n montre que la suite (u_n) est décroissante.

b) u_n intégrale d'une fonction positive sur $[0\,;1]$ est quel que soit le naturel n, un nombre positif ou nul.

La suite (u_n) décroissante et étant minorée par zéro converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 0$.

5. Pour tout naturel n, $\quad u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, puisque $u_{n+1} \geqslant 0$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.
Conclusion $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = 0$.

EXERCICE 3 — 3 points

1. $m = \mathrm{e}$.
   Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :
   $y - \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^1(x-1) \iff y = \mathrm{e}x$.
2. Les points communs à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{D}_m$ ont une abscisse qui vérifie :
   $\mathrm{e}^x = mx \iff \mathrm{e}^x - mx = 0$.
   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - mx$; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $g'(x) = \mathrm{e}^x - m$.
   Or $\mathrm{e}^x - m > 0 \iff \mathrm{e}^x > m \Rightarrow x > \ln m$; de même $\mathrm{e}^x - m < 0 \iff \mathrm{e}^x < m \Rightarrow x < \ln m$ et $\mathrm{e}^x - m = 0 \iff \mathrm{e}^x = m \Rightarrow x = \ln m$ (ce nombre existe puisque $m > 0$).
   La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty~;~\ln m[$ et croissante sur $]\ln m~;~+\infty[$. Elle a donc un minimum $g(\ln m) = \mathrm{e}^{\ln m} - m\ln m =$
   $m - m\ln m = m(1-\ln m)$. De plus :
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$;
   - En écrivant $g(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - m\right)$, on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

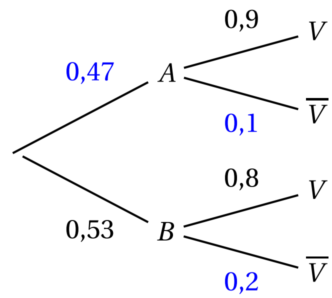
   D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\ln m$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$m(1-\ln m)$	↗ $+\infty$

   - Si $0 < m < \mathrm{e}$, alors $\ln m < 1 \iff 1 - \ln m > 0$ et $m(1-\ln m) > 0$: le minimum de la fonction est supérieur à zéro donc la fonction ne s'annule pas ; la droite et la courbe n'ont pas de point commun.
   - Si $m = \mathrm{e}$ on a vu que la droite est tangente à la courbe.
   - Si $m > \mathrm{e}$ alors $\ln m > 1 \iff 1 - \ln m < 0$ et $m(1-\ln m) < 0$: la fonction g s'annule deux fois d'après le théorème des valeurs intermédiaires, donc la droite et la courbe ont deux points communs.

EXERCICE 4 — 5 points
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Arbre de probabilités :



En bleu les données de l'énoncé, les autres valeurs étant obtenues par complément à 1.

2. **a)** D'après la formule des probabilités totales :

$p(V) = p(A\cap V) + p(B\cap V) = p(A)\times p_A(V) + p(B)\times p_B(V) = 0,47\times 0,9+0,53\times 0,8 = 0,423+0,424 = 0,847$.

b) $p_V(A) = \dfrac{p(A\cap V)}{p(V)} = \dfrac{0,423}{0,847} \approx 0{,}4994$ à 10^{-4} près.

3. Soit E l'évènement « laperont vote effectivement pour le candidat A ».

$E = (A\cap V)\cup\left(B\cap\overline{V}\right)$ (évènements disjoints), donc :

$p(E) = p(A\cap V)+p\left(B\cap\overline{V}\right) = 0,47\times 0,9+0,53\times 0,2 = 0,423+0,106 = 0,529$.

4. La fréquence observée est $f = 0,529$ pour un sondage réalisé auprès d'un échantillon de $n 1\,200$ personnes.

On vérifie que les conditions d'application de l'intervalle de confiance sont remplies :

$n = 1\,200 > 30$; $nf = 1\,200\times 0,529 = 634,8 >\geqslant 5$; $n(1-f) = 1\,200\times 0,471 = 565,2 \geqslant 5$.

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est alors :

$$I_c = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,529 - \frac{1}{\sqrt{1\,200}}\ ;\ 0,529+\frac{1}{\sqrt{1\,200}}\right]$$

$$I_c = \approx [0{,}5001\ ;\ 0{,}5579]$$

à 10^{-4} près. Ceci correspond à une fourchette [50,01 % ; 55,79 %]. Dans 95 % des cas le candidat A sera élu. Il peut légitimement croire en sa victoire.

5. Lors du sondage téléphonique il y a eu 10 contacts par demi-heure, soit 20 contacts par heure.

La probabilité que la personne appelée accepte de répondre est $p = 0,4$.

Soit n le nombre de personnes contactées par téléphone ; soit elle accepte de répondre avec une probabilité de 0,4,soit elle ne l'accepte pas.

On suppose que chaque personne répond indépendamment des autres.

Il s'agit d'un schéma de Bernouilli dont les paramètres sont $\mathscr{B}(n\ ;\ 0,4)$.

Obtenir un échantillon de 1 200 personnes qui acceptent de répondre, c'est considérer que l'espérance mathématique est $\text{E}(X) = 1\,200$. On cherche alors n tel que :

$\text{E}(X) = n\times 0,4 = 1\,200$, soit $n = 3\,000$.

Avec 3 000 personnes contactées, on peut espérer que 1 200 acceptent de répondre.

Le temps moyen nécessaire est donc de $t = \dfrac{3\,000}{20} = 150$ heures.