



Exercice 1. Géométrie dans l'espace

6 points

Commun à tous les candidats

$ABCDEFGH$ est un cube. On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1.

1. a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK) .

Théorème 1

Un vecteur \vec{n} est normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 non colinéaires de ce plan.

Pour démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK) , il suffit de prouver que le vecteur \overrightarrow{FD} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) , par exemple aux vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{IK} .

Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, on a :

$$I(0,5; 0; 0); J(0; 0,5; 1); K(1; 0,5; 0); F(1; 0; 1); D(0; 1; 0)$$

Et donc

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

Les vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{IK} ne sont pas colinéaires puisque $\frac{-0,5}{0,5} \neq \frac{0,5}{0,5}$. On calcule alors les produits scalaires :

$$\begin{cases} \overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,5 + 0,5 - 1 = 0 \\ \overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} = -0,5 + 0,5 = 0 \end{cases}$$

Le vecteur \overrightarrow{FD} est donc bien orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) .
La droite (FD) est donc bien orthogonale au plan (IJK) .



1. b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

Propriété 1

Soit vecteur \vec{u} non nul et un point A de l'espace. L'unique plan \mathcal{P} passant par A et de vecteur normal est normal \vec{u} est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$.

Donc d'après la propriété 1, , avec I (0, 5 ; 0 ; 0) :

$$M(x ; y ; z) \in (IJK) \iff \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{FD} = 0$$

$$M(x ; y ; z) \in (IJK) \iff -(x + 0, 5) + y - z = 0$$

$$M(x ; y ; z) \in (IJK) \iff -x + y - z + 0, 5 = 0$$

$$(IJK) : -x + y - z + 0, 5 = 0$$

2. Déterminer une équation paramétrique de la droite (FD).

La droite (FD) passant par le point F (1 ; 0 ; 1) et de vecteur directeur \overrightarrow{FD} est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur \overrightarrow{FM} soit colinéaire à \overrightarrow{FD} . On a alors :

$$(FD) = \left\{ M(x ; y ; z) ; \overrightarrow{FM} = t \overrightarrow{FD} \right\}, t \in \mathbb{R}$$

Une représentation paramétrique de la droite (FD) est donc :

$$(FD) : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). déterminer les coordonnées du point M.

La droite (FD) est orthogonale au plan (IJK) donc elle n'est pas parallèle à ce plan. Pour trouver les coordonnées de leur point d'intersection on doit alors résoudre le système :

$$\begin{cases} -x + y - z + 0, 5 = 0 \\ x = -t + 1 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Pour cela on va injecter dans l'équation du plan les équations paramétriques de la droite.

$$-(-t + 1) + t - (-t + 1) + 0, 5 = 0 \iff 3t - 1, 5 = 0 \iff t = 0, 5$$

On obtient donc pour $t = 0, 5$ les coordonnées du point d'intersection M : $M(0, 5 ; 0, 5 ; 0, 5)$.

4. Déterminer la nature du triangle IJF et calculer son aire.

On est dans un repère orthonormé, donc le calcul de distance est légitime avec les formules usuelles.

- On a $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} -0, 5 \\ 0, 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $IJ = \|\overrightarrow{IJ}\| = \sqrt{(-0, 5)^2 + 0, 5^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ u.l.

- On a $\overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix} 0, 5 \\ 0, 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $IK = \|\overrightarrow{IK}\| = \sqrt{0, 5^2 + 0, 5^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ u.l.



- On a $\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et donc $JK = \|\overrightarrow{JK}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ u.l.
- Le triangle IJK n'est donc pas isocèle.
- Les vecteurs \overrightarrow{IK} et \overrightarrow{IJ} sont orthogonaux car leur produit scalaire est nul, $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{IJ} = -0,5^2 + 0,5^2 = 0$.
Donc le triangle IJK est rectangle en I.
- **Calcul de l'aire :**
L'aire du triangle IJK , rectangle en I est donnée par le produit des côtés perpendiculaires divisé par 2 donc :

$$\mathcal{A}_{IJK} = \frac{IJ \times IK}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ u.a.}$$

5. Calculer le volume du tétraèdre $IFJK$.

Le volume d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V}_{FIJK} = \frac{1}{3} \times \text{Aire base} \times \text{Hauteur associée}$$

On a montré que la droite (FD) étant perpendiculaire en M au plan (IJK) .

Donc le volume de la pyramide $IFJK$ de base le triangle IJK associé à la hauteur FM est :

$$\mathcal{V}_{FIJK} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{IJK} \times FM = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times FM$$

On a ici

$$\overrightarrow{FM} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \text{ et donc } FM = \|\overrightarrow{FM}\| = \sqrt{(-0,5)^2 + 0,5^2 + (-0,5)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ u.l.}$$

D'où

$$\mathcal{V}_{FIJK} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8} \text{ u.v.}$$

6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

La droite (IJ) passant par le point $I(0,5; 0; 0)$ et de vecteur directeur \overrightarrow{IJ} est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur \overrightarrow{IM} soit colinéaire à \overrightarrow{IJ} . On a alors :

$$(IJ) = \left\{ M(x; y; z); \overrightarrow{IM} = \begin{pmatrix} x-0,5 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = t \overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \implies (IJ) : \begin{cases} x = -0,5t + 0,5 \\ y = 0,5t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

De même puisque $L(1; 1; 0,5)$ et $K(1; 0,5; 0)$:

$$(KL) = \left\{ M(x; y; z); \overrightarrow{KM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0,5 \\ z-0 \end{pmatrix} = k \overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\} \implies (KL) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0,5k + 0,5 \\ z = 0,5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

On cherche alors à résoudre le système

$$\begin{cases} -0,5t + 0,5 = 1 \\ 0,5t = 0,5k + 0,5 \\ t = 0,5k \end{cases}$$

Ce système admet un couple solution unique, $(t = -1; k = -2)$ qui nous donne les coordonnées du point d'intersection.

Les droites (IJ) et (KL) sont donc sécantes en un point $N(1; -0,5; -1)$.

Remarque : les coordonnées du point d'intersection n'étant pas demandées, on pouvait aussi juste prouver que les droites étaient coplanaires et non parallèles.



Exercice 2. Suites et intégrales

6 points

Commun à tous les candidats

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

La fonction définie sur le segment $[0; 1]$ par $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur cet intervalle donc intégrable.

De plus elle est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec

$$\forall x \in [0; 1]; u(x) = 1+x > 0$$

De ce fait cette fonction admet pour primitive sur $[0; 1]$ par exemple la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ (il y en a d'autres ...).

On a donc :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$$u_0 = [\ln(1+x)]_0^1$$

$$u_0 = \ln 2 - \ln 1$$

$$\boxed{u_0 = \ln 2}$$

2.

2. a. Démontrer que pour tout entier n : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

Par linéarité de l'intégrale on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} + \frac{x^n}{1+x} \right) dx$$

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x} dx$$

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} dx$$

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 x^n dx$$

$$u_{n+1} + u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1} - 0$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}}$$

2. b. En déduire la valeur exacte de u_1 .

D'après la relation précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}; (u_n) : \begin{cases} u_0 & = \ln 2 \\ u_{n+1} & = \frac{1}{n+1} - u_n \end{cases} \implies u_1 = \frac{1}{0+1} - u_0 \implies \boxed{u_1 = 1 - \ln 2}$$



3.

3. a. Recopier et compléter l'algorithme pour qu'il affiche le terme de rang n de la suite.

On va utiliser la relation précédente qui nous permet de définir la suite par récurrence :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = \ln 2 \\ u_{n+1} & = \frac{1}{n+1} - u_n \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

On peut alors compléter l'algorithme :

Variabes :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur $\boxed{\ln 2}$
Traitement :	Pour i variant de 1 à \boxed{n} Affecter à u la $\boxed{\frac{1}{i} - u}$. Fin de Pour.
Sortie :	Afficher u .

3. b. D'après le tableau de valeurs, quelle conjecture peut-on émettre ?

On peut conjecturer que la suite semble décroissante, positive et convergente vers 0.

4.

4. a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

On va pour cela étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

Par linéarité de l'intégrale on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x} \right) dx \\ u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} dx \\ u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx \end{aligned}$$

Or pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, et pour tout entier n on a :

$$\begin{cases} \forall x \in [0; 1] & ; (x-1) \leq 0 \\ \forall x \in [0; 1] & ; (1+x) > 0 \\ \forall x \in [0; 1], \forall n \in \mathbb{N} & ; x^n \geq 0 \end{cases} \implies \frac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0$$

De fait, par propriété dite de positivité de l'intégrale on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx \leq 0$$

Ce qui prouve bien que la suite (u_n) est décroissante.

4. b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Pour tout entier n , u_n est positif comme intégrale d'une fonction positive sur $[0; 1]$. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite ℓ .



5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Démontrer que $\ell = 0$.

On sait que la suite (u_n) est convergente vers ℓ soit :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{cases}$$

De fait, en passant à la limite dans la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$$

On obtient l'égalité :

$$(\ell + \ell = 0) \implies \ell = 0$$

La suite (u_n) converge donc vers $\ell = 0$.



Exercice 3.

3 points

Commun à tous les candidats

On considère la courbe \mathcal{C} d'équation $y = e^x$.

Pour tout réel m strictement positif, on note \mathcal{D}_m la droite d'équation $y = mx$.

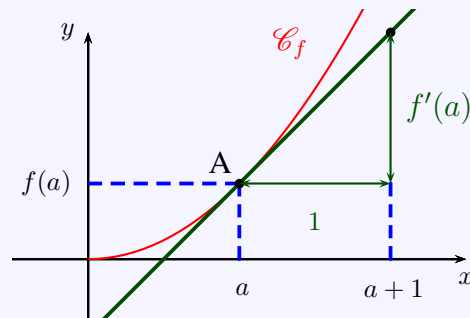
1. Pour cette question, on choisit $m = e$.

Démontrer que la droite \mathcal{D}_e d'équation $y = ex$, est tangente à \mathcal{C} en son point d'abscisse 1.

Propriété 2 (Tangente à \mathcal{C}_f en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donnée par :

$$T : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Notons f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x$. Cette fonction, la fonction exponentielle, est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $f'(x) = e^x$.

On cherche l'équation de la tangente à \mathcal{C} au point A d'abscisse $a = 1$. Cette équation est d'après la propriété précédente :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) ; \text{ avec } \begin{cases} f(1) = e^1 \\ f'(1) = e^1 \end{cases}$$

$$y = e(x - 1) + e = ex$$

La droite \mathcal{D}_e d'équation $y = ex$, est donc tangente à \mathcal{C} en son point d'abscisse 1.

2. Conjecturer, suivant les valeurs de m , le nombre de points d'intersection de la droite \mathcal{D}_m avec la courbe \mathcal{C} .

Sur l'écran de la calculatrice ou simplement avec le graphique proposé on peut faire les conjectures suivantes :

- Si $m < e$ il n'y a aucun point d'intersection ;
- Si $m = e$ il y a un unique point d'intersection ;
- Si $m > e$ il y a deux points d'intersection.

3. Démontrer cette conjecture.

Remarque : la preuve ici proposée est bien plus détaillée que celle attendue lors de l'épreuve. Cela vous permet de réviser la rédaction type de ce genre de questions.

On va introduire une fonction auxiliaire dont les zéros seront les abscisses des éventuels points d'intersection de la droite \mathcal{D}_m avec la courbe \mathcal{C} . Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = f(x) - mx = e^x - mx \end{cases}$$

- **Variations de g .**

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R} ; g'(x) = e^x - m$$



Étude du signe de la dérivée.

- On a pour tout réel x :

$$g'(x) = 0 \iff e^x - m = 0$$

$$g'(x) = 0 \iff e^x = m$$

En composant par la fonction \ln définie sur $]0; +\infty[$, on a puisque $m > 0$:

$$g'(x) = 0 \iff x = \ln m$$

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}; \boxed{g'(x) = 0 \iff x = \ln m}$$

- En outre pour tout réel x :

$$g'(x) > 0 \iff e^x - m > 0$$

$$g'(x) > 0 \iff e^x > m$$

En composant par la fonction \ln définie et croissante sur $]0; +\infty[$, on a puisque $m > 0$:

$$g'(x) > 0 \iff x > \ln m$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; \boxed{g'(x) > 0 \iff x > \ln m}$$

En conséquence :

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) > 0 \iff x > \ln m \\ g'(x) = 0 \iff x = \ln m \end{array} \right\} \implies g'(x) < 0 \iff x < \ln m$$

La fonction g est donc croissante sur $[\ln m; +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty; \ln m]$.

• **Limites aux bornes.**

Propriété 3 (Limites liées à la fonction exponentielle)

$$- (1) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad | \quad - (2) : \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad | \quad - (3) : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; g(x) = e^x - mx$$

- **Limite en $-\infty$**

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \forall m > 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} mx = -\infty \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{par différence}} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - mx) = +\infty \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty}$$

- **Limite en $+\infty$**

$$\forall x \in \mathbb{R}; g(x) = e^x - mx = e^x \left(1 - \frac{mx}{e^x} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx}{e^x} = 0 \end{array} \right. \text{ d'après le (1) de la propriété des croissances comparées}$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{mx}{e^x} \right) = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{par produit}} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{mx}{e^x} \right) = +\infty \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$$

- **Tableau de variations.** Le minimum de la fonction g est atteint pour $x = \ln m$ et vaut

$$g(\ln m) = m(1 - \ln m)$$

x	$-\infty$	$\ln m$	$+\infty$		
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	$m(1 - \ln m)$		$+\infty$	

- **Étude du signe de $g(\ln m)$.**

D'après l'étude menée, il est évident que le nombre de solutions éventuelles de l'équation $g(x) = 0$ dépend du signe du minimum

$$g(\ln m) = m(1 - \ln m)$$

On a m strictement positif donc $g(\ln m) = m(1 - \ln m)$ est du signe de $(1 - \ln m)$ soit :

- On a pour tout réel $m > 0$:

$$\begin{aligned} m(1 - \ln m) = 0 &\iff (1 - \ln m) = 0 \\ m(1 - \ln m) = 0 &\iff 1 = \ln m \end{aligned}$$

En composant par la fonction Exp définie sur \mathbb{R} :

$$m(1 - \ln m) = 0 \iff e = m$$

Soit

$$\forall m > 0 ; \boxed{m(1 - \ln m) = 0 \iff m = e}$$

- En outre pour tout réel $m > 0$:

$$\begin{aligned} m(1 - \ln m) > 0 &\iff (1 - \ln m) > 0 \\ m(1 - \ln m) > 0 &\iff 1 > \ln m \end{aligned}$$

En composant par la fonction Exp définie et croissante sur \mathbb{R} :

$$m(1 - \ln m) > 0 \iff e > m$$

Soit

$$\forall m > 0 ; \boxed{m(1 - \ln m) > 0 \iff m < e}$$

En conséquence :

$$\left. \begin{aligned} g(\ln m) > 0 &\iff m < e \\ g(\ln m) = 0 &\iff x = e \end{aligned} \right\} \implies g(\ln m) < 0 \iff m > e$$

- **Solutions de l'équation**

- **Cas 1 :** $g(\ln m) > 0 \iff m < e$.

Dans ce cas, le minimum absolu de la fonction g est strictement positif et donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur \mathbb{R} . La courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D}_m n'ont pas de point d'intersection.

- **Cas 2 :** $g(\ln m) = 0 \iff m = e$.

Dans ce cas, le minimum absolu de la fonction g est nul et donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} qui est $x = \ln e = 1$. La courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D}_m ont un seul point d'intersection.

La droite \mathcal{D}_m est alors tangente à la courbe au point d'abscisse 1, c'est le cas étudié lors de la question 1. de l'exercice.

Puis vient le cas le plus intéressant !

- Cas 3 : $g(\ln m) < 0 \iff m > e$.

x	$-\infty$	α	$\ln m$	β	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	0	$m(1 - \ln m) < 0$	0	$+\infty$

On peut alors appliquer le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires pour prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur \mathbb{R} .

Théorème 2 (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a ; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a ; b]$.

Remarque : La première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche).

Sur l'intervalle $]-\infty ; \ln m]$:

- * La fonction g est **continue** et **strictement décroissante** sur $]-\infty ; \ln m]$;
- * L'image par g de l'intervalle $]-\infty ; \ln m]$ est $[g(\ln m) ; +\infty]$
- * Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image car $g(\ln m) < 0$.

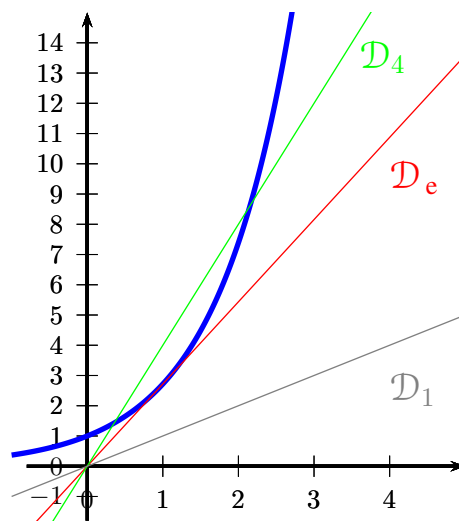
Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x) = k = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]-\infty ; \ln m]$.

Sur l'intervalle $[\ln m ; +\infty[$:

- * La fonction g est **continue** et **strictement croissante** sur $[\ln m ; +\infty[$;
- * L'image par g de l'intervalle $[\ln m ; +\infty[$ est $[g(\ln m) ; +\infty]$
- * Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image car $g(\ln m) < 0$.

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x) = k = 0$ admet une solution unique β sur l'intervalle $[\ln m ; +\infty[$.

Dans le cas 3, $g(\ln m) < 0 \iff m > e$, La courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D}_m ont deux points d'intersection.





Exercice 4. Obligatoire : Probabilités

5 points

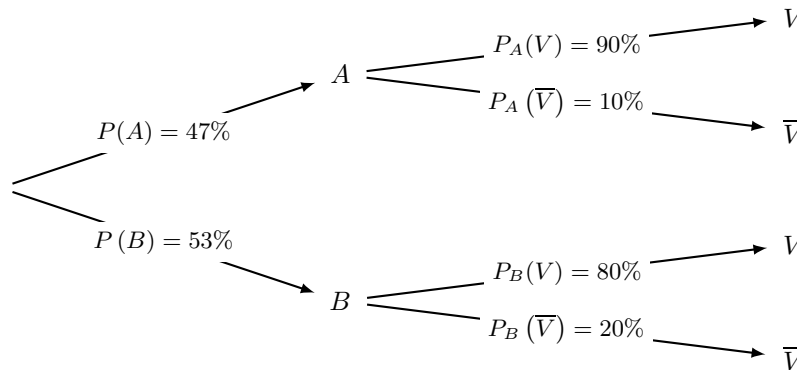
Candidats n'ayant pas suivis la spécialité Maths

1. Construire un arbre de probabilité.

On a 47% des personnes qui affirment vouloir voter pour A donc $P(A) = 47\%$ et parmi celles-ci 10% ne disent pas la vérité donc $P_A(\bar{V}) = 10\%$ et $P_A(V) = 90\%$.

De même on a 53% des personnes qui affirment vouloir voter pour B donc $P(B) = 53\%$ et parmi celles-ci 20% ne disent pas la vérité donc $P_B(\bar{V}) = 20\%$ et $P_B(V) = 80\%$.

Soit :



2.

2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

On cherche $P(V)$ or d'après la formule des probabilités totales :

$$P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B)$$

$$P(V) = P(A) \times P_A(V) + P(B) \times P_B(V)$$

$$P(V) = 0,47 \times 0,9 + 0,53 \times 0,8$$

$$P(V) = 0,847 = 84,7\%$$

2. b. Sachant que la personne dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle vote pour le candidat A.

$$P_V(A) = \frac{P(V \cap A)}{P(V)}$$

$$P_V(A) = \frac{P(A) \times P_A(V)}{P(V)}$$

$$P_V(A) = \frac{0,47 \times 0,9}{0,847}$$

$$P_V(A) = \frac{0,423}{0,847} \approx 0,499$$

3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote pour le candidat A est de 0,529.

Une personne vote pour A si elle affirme vouloir voter pour A et dit la vérité ou si elle affirme vouloir voter pour B et ment. La probabilité cherchée, notée p est donc :

$$p = P(V \cap A) + P(\bar{V} \cap B)$$

$$p = P(A) \times P_A(V) + P(B) \times P_B(\bar{V})$$

$$p = 0,47 \times 0,9 + 0,53 \times 0,2$$

$$p = 0,529$$



4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteront pour le candidat A.

*estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut-il croire en sa victoire ?

Théorème 3 (Intervalle de confiance)

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p .

Si les conditions suivantes sont remplies :

$$\left\{ \begin{array}{l} \checkmark \quad n \geq 30 \\ \checkmark \quad nf \geq 5 \\ \checkmark \quad n(1-f) \geq 5 \end{array} \right.$$

Alors un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

La fréquence observée est donc $f = 52,9\%$ et la taille de l'échantillon est $n = 1\,200$ soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \checkmark \quad n = 1\,200 \geq 30 \\ \checkmark \quad np = 634,8 \geq 5 \\ \checkmark \quad n(1-p) = 565,2 \geq 5 \end{array} \right.$$

Les conditions d'application sont vérifiées, donc un intervalle de confiance au seuil de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,529 - \frac{1}{\sqrt{1\,200}} ; 0,529 + \frac{1}{\sqrt{1\,200}} \right]$$

Soit puisque les bornes sont :

- $0,529 - \frac{1}{\sqrt{1\,200}} \approx 0,500\,132$. On arrondit la borne inférieure par défaut au dix-millième soit **0,5001**.
- $0,529 + \frac{1}{\sqrt{1\,200}} \approx 0,557\,87$. On arrondit la borne supérieure par excès au dix-millième soit **0,5579**.

$$I \approx [0,5001 ; 0,5579]$$

Conclusion : Au seuil de confiance de 95%, le candidat A peut donc croire en sa victoire, puisque la proportion réelle d'électeurs voulant voter pour lui est estimée appartenir (au seuil de confiance de 95%) à un intervalle tout entier situé au-dessus de 50%. La borne inférieure de l'intervalle est cependant bien proche des 50% !

5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4. L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.

Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

Puisque 40% des personnes contactées accepte de répondre, on peut estimer que 4 personnes vont répondre au sondage par demi-heure. Pour n demi-heures on aura donc $4n$ personnes répondant au sondage.

On cherche alors le nombre n de demi-heures minimal tel que

$$4n \geq 1\,200 \iff n \geq \frac{1\,200}{4} = 300$$

Il faudra donc 300 demi-heures soit 150 heures pour parvenir à cet objectif.



Exercice 5. Spécialité

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n , la probabilité de fumer le n -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer. On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1 .

On appelle p_1 la probabilité de ne pas fumer le 1^{er} jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_1 , la probabilité de fumer le 1^{er} jour après sa décision.

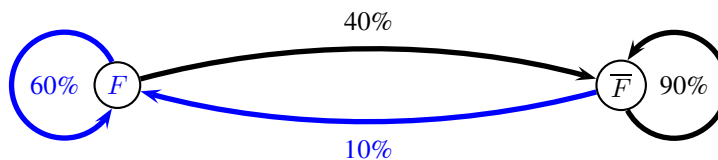
Puisque $q_0 = 1$ on se place dans le cas où la personne a fumé le jour où il a décidé d'arrêter. Au premier jour après sa décision, il a donc une probabilité $q_1 = 0,6$ de fumer et $p_1 = 1 - q_1 = 0,4$ de ne pas fumer.

2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n) . Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n) ?

On peut représenter cette « marche aléatoire » à l'aide d'un graphe. En notant F l'état « la personne fume un jour donné » :



- On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n , la probabilité de fumer le n -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.
- Le $(n + 1)$ -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer, la probabilité p_{n+1} de ne pas fumer est donc la somme des probabilités de ne pas fumer en ayant fumé le jour d'avant et celle de ne pas fumer en ayant pas fumé le jour d'avant soit :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; p_{n+1} = 0,9 p_n + 0,4 q_{n+1}$$

- On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; q_{n+1} = 1 - p_{n+1} = 0,1 p_n + 0,6 q_{n+1}$$

- Les formules à écrire sont donc :

- En B3 : $= 0,9 \times B2 + 0,4 \times C2$;
- En C3 : $= 1 - B3$ ou $= 0,1 \times B2 + 0,6 \times C2$.



3. On définit les matrices M , A et B par :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

3. a. Démontrer que $M = A + 0,5B$.

On a :

$$A + 0,5B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$A + 0,5B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 & -0,4 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$A + 0,5B = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

On a donc montré que : $M = A + 0,5B$

3. b. Vérifier que $A^2 = A$, et que $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• Montrons que $A^2 = A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,8^2 + 0,8 \times 0,2 & 0,8^2 + 0,8 \times 0,2 \\ 0,2 \times 0,8 + 0,2^2 & 0,2 \times 0,8 + 0,2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

On a donc montré que $A^2 = A$.

• Montrons que $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,2 - 0,8 \times 0,2 & -0,8^2 + 0,8^2 \\ 0,2^2 - 0,2^2 & -0,2 \times 0,8 + 0,2 \times 0,8 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De même

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0,2 \times 0,8 - 0,8 \times 0,2 & 0,2 \times 0,8 - 0,8 \times 0,2 \\ -0,2 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 & -0,2 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc montré que :

$$A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.

3. c. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $M^n = A + 0,5^n B$.

Établissons le résultat par récurrence sur l'entier n

- Initialisation : on a pour $n = 0$:

$$M^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A + 0,5^0 B = A + B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$M^0 = A + 0,5^0 B$$

La propriété est vraie au rang 0.

- Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie au rang n soit que : $M^n = A + 0,5^n B$.
Démontrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$, soit que $M^{n+1} = A + 0,5^{n+1} B$.
Pour n entier on a :

$$M^{n+1} = M^n \times M$$

$$\text{Or : } \begin{cases} M = A + 0,5B & \text{: d'après la question 3a.} \\ M^n = A + 0,5^n B & \text{: d'après l'hypothèse de récurrence} \end{cases}$$

$$M^{n+1} = (A + 0,5^n B) \times (A + 0,5B)$$

$$M^{n+1} = A^2 + 0,5A \times B + 0,5^n B \times A + 0,5^{n+1} B^2$$

Or d'après la question 3b., $A^2 = A$, et que $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$ soit :

$$M^{n+1} = \underbrace{A^2}_A + 0,5 \underbrace{A \times B}_{0_2} + 0,5^n \underbrace{B \times A}_{0_2} + 0,5^{n+1} \underbrace{B^2}_B$$

$$M^{n+1} = A + 0_2 + 0_2 + 0,5^{n+1} B$$

$$M^{n+1} = A + 0,5^{n+1} B$$

La propriété est vraie au rang $(n + 1)$.

- Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. Par conséquent, pour tout entier naturel n , on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; M^n = A + 0,5^n B}$$

3. d. En déduire que, pour tout entier naturel n , $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.

On a admis que pour tout entier naturel n :

$$X_{n+1} = M \times X_n ; X_n = M^n \times X_0 \text{ et } X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

Or d'après la question 3c. pour tout entier n :

$$M^n = A + 0,5^n B$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + 0,5^n \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5^n \times 0,2 & 0,8 - 0,5^n \times 0,8 \\ 0,2 - 0,5^n \times 0,2 & 0,2 + 0,5^n \times 0,8 \end{pmatrix}$$



Et donc

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = M^n \times X_0$$

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5^n \times 0,2 & 0,8 - 0,5^n \times 0,8 \\ 0,2 - 0,5^n \times 0,2 & 0,2 + 0,5^n \times 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5^n \times 0,2 & 0,8 - 0,5^n \times 0,8 \\ 0,2 - 0,5^n \times 0,2 & 0,2 + 0,5^n \times 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 - 0,5^n \times 0,8 \\ 0,2 + 0,5^n \times 0,8 \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}; p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$$

3. e. À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?

Par théorème

Théorème 4

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < q = 0,5 < 1$ et d'après le théorème 4 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8 \times (0,5)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (p_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,8$$

À long terme, la probabilité que la personne fume va se stabiliser vers $0,8 = 80\%$. Cela ne permet pas d'affirmer avec certitude qu'elle n'arrêtera pas de fumer même si la probabilité est élevée.

Remarque : la convergence est assez rapide en effet, les premiers termes donnent

n	p_n	q_n
0	0	1
1	0,4	0,6
2	0,6	0,4
3	0,7	0,3
4	0,75	0,25
5	0,775	0,225
6	0,7875	0,2125
7	0,79375	0,20625
8	0,796875	0,203125
9	0,7984375	0,2015625
10	0,79921875	0,20078125
11	0,799609375	0,200390625
12	0,799804688	0,200195313
13	0,799902344	0,200097656
14	0,799951172	0,200048828
15	0,799975586	0,200024414