

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

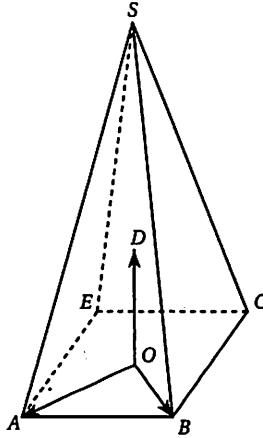
SPÉCIALITÉ
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6 dont une annexe en page 6/6 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (5 points)

Dans l'espace, on considère une pyramide $SABCE$ à base carrée $ABCE$ de centre O . Soit D le point de l'espace tel que $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées $(0; 0; 3)$ dans ce repère.



Partie A -

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure jointe en **annexe (à rendre avec la copie)**.
2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC) . Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure jointe en **annexe (à rendre avec la copie)**.
3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}; 0\right)$.
Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère $AUVE$ est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$.
Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S .
3. Déterminer les coordonnées de H , point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU) .
4. Le plan (EAU) partage la pyramide $(SABCE)$ en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

EXERCICE 2 (5 points)**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

- Déterminer la matrice M^2 . On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.
- Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.
- En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$.

Partie B Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a , b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1; 1)$, $B(-1; -1)$ et $C(2; 5)$.

- Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a , b et c tels que

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Calculer les nombres a , b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C Retour au cas général

Les nombres a , b , c , p , q , r sont des entiers.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1; p)$, $B(-1; q)$ et $C(2; r)$.

On cherche des valeurs de p , q et r pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A , B et C .

- Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, avec a , b et c entiers, alors $\begin{cases} -3p + q + 2r \equiv 0 [6] \\ 3p - 3q \equiv 0 [6] \\ 6p + 2q - 2r \equiv 0 [6] \end{cases}$.

- En déduire que $\begin{cases} q - r \equiv 0 [3] \\ p - q \equiv 0 [2] \end{cases}$.

- Réciproquement, on admet que si $\begin{cases} q - r \equiv 0 [3] \\ p - q \equiv 0 [2] \end{cases}$ alors il existe trois entiers a , b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A , B et C .

a) Montrer que les points A , B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.

b) On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q , r , a , b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A , B et C .

EXERCICE 3 (4 points)

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.

La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ .

1. Calculer la probabilité de l'événement M : « la tablette est mise sur le marché ».
2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,97.
Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à 0,97.

Partie B Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme. L'entreprise a trois fournisseurs différents : le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.

Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes. On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'événement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'événement « la fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2} .
2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, l'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes. Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif?

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$.

On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la **partie A**.
b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie C

Soit \mathcal{C}' la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}$.
En déduire que les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $H(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

$$\text{Calculer } I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln(x)}{x} dx.$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 1

