Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord
2 juin 2015

Exercice 1

Partie A

1. On peut utiliser ici le théorème de Thalès pour prouver que $\overrightarrow{BU} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BS}$ et ainsi construire le point. Pour cela considérons le triangle SOB.
Nous savons que (DU) est parallèle à (OB) car D et U partagent la même cote et O et B sont également de même cote. Nous savons également que $\dfrac{OD}{OS} = \dfrac{1}{3}$, là encore en raison de la cote de D et S. On en déduit, par application de l'antique théorème, que $\dfrac{BU}{BS} = \dfrac{OD}{OS} = \dfrac{1}{3}$.
2. Considérons les plans (AUE) et (BCS). Ces plans sont sécants en la droite (UV). Or, (BC), incluse dans (BCS), est parallèle à (AE), incluse dans (AEU) ; puisque $ABCE$ est un carré.
Par application du théorème du toit, on en déduit que (UV) est parallèle à (BC). Cette dernière propriété permet de construire le point V.
3. Il nous faut prouver d'une part que K appartient à (AE) et d'autre part que (KU) est perpendiculaire à (AE).
On lit les coordonnées de $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et celles de $E\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ et on calcule ainsi $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. D'autre part on détermine $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{-1}{6}\\\frac{-1}{6}\\0\end{pmatrix}$.
On en déduit que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AE}$, ce qui prouve que K est un point de $[AE]$.
Déterminons les coordonnées de U. On a démontré dans la question 1 que $\overrightarrow{BU} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BS}$, ce qui donne un système portant sur les coordonnées de U :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_u - 0 & = & \dfrac{1}{3}(0-0)\\ y_u - 1 & = & \dfrac{1}{3}(0-1)\\ z_u & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_u & = & 0\\ y_u & = & \dfrac{2}{3}\\ z_u & = & 1\end{array}\right.$$
On peut maintenant déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{KU}\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{5}{6}\\1\end{pmatrix}$.
On obtient ainsi, sachant que le repère est orthonormé : $\overrightarrow{KU}\cdot\overrightarrow{AE} = \dfrac{-5}{6}\times(-1) + \dfrac{5}{6}\times(-1) + 1\times 0 = 0$, ce qui permet de conclure. Le point K est bien le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.

> On pouvait également déterminer une équation paramétrique de (BS) afin de calculer les coordonnées de U.
> Une telle méthode revient à chercher le réel t tel que $\overrightarrow{BU} = t\overrightarrow{BS}$ avec la cote de U égale à 1.

Partie B

1. Il suffit de s'assurer que les points A, E et U vérifient bien l'équation proposée.
Pour le point A, on a bien $3\times 1-3\times 0+5\times 0-3=0$.
De même pour le point E, il est clair que $3\times 0-3\times(-1)+5\times 0-3=0$.
Et enfin, pour le point U, on vérifie mentalement que $3\times 0-3\times\dfrac{2}{3}+5\times 1-3=0$.
Cette équation de plan convient donc.
2. Puisque l'on a muni l'espace d'un repère orthonormé, on déduit de l'équation cartésienne proposée les coordonnées d'un vecteur normal au plan (EAU). Notons $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}$ ce vecteur.
C'est un vecteur directeur de (d) puisque (d) est orthogonale au plan (EAU). À partir des coordonnées du point S et de celles de ce vecteur, on en déduit une équation paramétrique de (d) :
$$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&3t\\y&=&-3t\\z&=&3+5t\end{array}\right.\qquad t\in\mathbb{R}$$
3. Les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de ce point satisfont simultanément une équation paramétrique de (d) ainsi qu'une équation cartésienne du plan (EAU). On cherche donc x, y, z et t tels que :
$$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&3t\\y&=&-3t\\z&=&3+5t\\0&=&3x-3y+5z-3\end{array}\right.$$
À partir de l'équation cartésienne du plan, en substituant x, y et z on en déduit le système équivalent :
$$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&3t\\y&=&-3t\\z&=&3+5t\\0&=&3(3t)-3(-3t)+5(3+5t)-3\end{array}\right.$$
La dernière équation permet de déterminer $t=\dfrac{-12}{43}$ et, par suite, on peut déterminer les coordonnées de $H\begin{pmatrix}\frac{-36}{43}\\\frac{36}{43}\\\frac{69}{43}\end{pmatrix}$.
4. Le plan (EAU) coupe le tétraèdre $SABCE$ en un prisme $ABUECV$ d'une part et un tétraèdre $SAUVE$ d'autre part. Il nous faut donc déterminer si ces deux solides ont le même volume ; ce qui revient à déterminer si le volume de l'un des deux solides correspond à la moitié de celui de $SABCE$.
Or toutes les questions précédentes nous ont permis de rassembler des éléments permettant de calculer le volume du tétraèdre $SAUVE$. Nous connaissons en effet l'aire de sa base $\mathcal{A}_{AUVE}=\dfrac{5\sqrt{43}}{18}$. Reste à calculer sa hauteur SH. On a ainsi :
$$\begin{aligned}SH&=\sqrt{\left(\frac{-36}{43}-0\right)^2+\left(\frac{36}{43}-0\right)^2+\left(3-\frac{69}{43}\right)^2}\\&=\frac{12}{\sqrt{43}}\end{aligned}$$
Le volume du tétraèdre $SAUVE$ est donc $\mathcal{V}_{SAUVE}=\dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{AUVE}\times SH$, ce qui donne après calcul : $\mathcal{V}_{SAUVE}=\dfrac{10}{9}$.
Pour finir, déterminons le volume de la grande pyramide $SABCE$. On peut, par application du théorème de Pythagore au triangle ABO rectangle en O prouver que $AB=\sqrt{2}$. Sa base a donc pour aire

$AB^2 = 2$. D'autre part, sa hauteur est $SO = 3$. Le volume de la grosse pyramide est donc $\mathcal{V}_{SABCE} = \dfrac{1}{3}AB^2 \times SO = 2$.

On constate que $\dfrac{1}{2}\mathcal{V}_{SABCE} \neq \mathcal{V}_{SAUVE}$, ce qui permet de conclure.

Exercice 2

1. (a) On applique les formules de récurrence proposées en utilisant un petit programme fait à la calculatrice.
On obtient :

$$A_0\begin{pmatrix}-4,8\\1,4\end{pmatrix} \qquad A_1\begin{pmatrix}-4,68\\-1,76\end{pmatrix} \qquad A_2\begin{pmatrix}-2,688\\-4,216\end{pmatrix}$$

> Ceux qui font l'option mathématiques auront reconnu qu'on peut définir matriciellement la suite des coordonnées. C'est d'ailleurs comme cela que l'on peut rapidement calculer les termes de la suite à la calculatrice.

(b) Voir plus bas :

```
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur −3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
    Construire le point de coordonnées (x ; y)
    t prend la valeur x
    x prend la valeur 0,8 × x − 0,6 × y .
    y prend la valeur 0,6 × t + 0,8 × y.
Fin Pour
```

> L'erreur à ne pas commettre ici était d'utiliser x dans le calcul de y. En effet, à ce stade, x a déjà été modifié. C'est d'ailleurs pour cela que l'algorithme propose de stocker temporairement l'ancienne valeur de x dans la variable t.

(c) On a identifié les points sur l'annexe en fonction de leurs coordonnées. Ils semblent appartenir à un cercle de centre O et de rayon 5.

(a) Faisons une démonstration par récurrence puisque la suite z est définie par récurrence.
Au rang 0, $|z_0| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$. La propriété est vérifiée.
Fixons un entier p et supposons que $|z_p| = \sqrt{x_p^2+y_p^2} = 5$.
Au rang $p+1$:

$$\begin{aligned}|z_{p+1}| &= \sqrt{x_{p+1}^2+y_{p+1}^2}\\ &= \sqrt{\left(0,8x_p-0,6y_p\right)^2+\left(0,6x_p+0,8y_p\right)^2}\\ &= \sqrt{(0,8^2+0,6^2)x_p^2+(0,6^2+0,8^2)y_p^2+(0,8\times0,6-0,6\times0,8)x_p\,y_p}\\ &= \sqrt{x_p^2+y_p^2}.\text{ Or, par hypothèse, } \sqrt{x_p^2+y_p^2}=5.\text{ Donc :}\\ |z_{p+1}| &= 5\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire et initialisée.
Ainsi, pour tout n, on a bien $u_n = |z_n| = 5$, ce qui prouve notre conjecture concernant le lieu des points.

(b) Calculons, pour tout n, la forme algébrique de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n$:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n &= (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))\,(x_n + \mathrm{i}y_n)\\ &= (0,8 + \mathrm{i}0,6)(x_n + \mathrm{i}y_n)\\ &= (0,8x_n + \mathrm{i}^2 0,6y_n) + (0,6x_n + 0,8y_n)\mathrm{i}\\ &= (0,8x_n - 0,6y_n) + (0,6x_n + 0,8y_n)\mathrm{i}\end{aligned}$$

On reconnaît les formules de récurrence de x_{n+1} et y_{n+1} :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n &= x_{n+1} + y_{n+1}\mathrm{i}\\ &= z_{n+1}\end{aligned}$$

(c) z est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sur des complexes. Comme cette notion n'est pas au programme, nous allons redémontrer la formule explicite.
Pour $n = 0$ la formule est bien sûr vraie. Supposons-la vraie à un rang p fixé : $z_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta} z_0$.
Mais nous savons que $z_{p+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta} z_0$. On a ainsi :
$z_{p+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta+\mathrm{i}\theta} z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)\theta} z_0$.
La propriété est donc héréditaire et initialisée.
Ainsi, pour tout n, on a bien $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.

(d) Posons $\theta_0 = \arg(z_0)$. Par définition :

$$\frac{z_0}{|z_0|} = \cos(\theta_0) + \mathrm{i}\sin(\theta_0)\text{. Or :}$$

$$\begin{aligned}\frac{z_0}{|z_0|} &= \frac{-3}{5} + \mathrm{i}\frac{4}{5}\\ &= -0,6 + \mathrm{i}0,8\text{. On reconnaît les valeurs de cos et sin de } \theta :\\ &= -\sin(\theta) + \mathrm{i}\cos(\theta)\text{. En utilisant les formules de trigonométrie, on a :}\end{aligned}$$

$$\frac{z_0}{|z_0|} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

On a donc bien, en identifiant la première et la dernière ligne, $\arg(z_0) = \theta_0 = \dfrac{\pi}{2} + \theta$

> On pouvait également calculer le forme algébrique de $|z_0|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ et montrer qu'elle était identique à celle de z_0. Cette méthode est d'ailleurs certainement plus « facile » à mettre en œuvre.

(e) On utilise les propriétés de l'argument :

$$\arg(z_n) = \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0\right) = \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right) + \arg(z_0) = n\theta + \frac{\pi}{2} + \theta = (n+1)\theta + \frac{\pi}{2}$$

On représente θ en utilisant le point A_0. En effet, ce point vérifie $\left(\vec{\imath};\ \overrightarrow{OA_0}\right) = \arg(z_0) = \theta + \dfrac{\pi}{2}$.
Ainsi, on obtient facilement, par différence, que $\left(\vec{\jmath};\ \overrightarrow{OA_0}\right) = \theta$.
On a tracé θ en annexe en utilisant cette dernière remarque.

Pour obtenir A_{n+1} :
À partir du point A_n, on se déplace d'un angle θ sur le cercle de rayon 5 et de centre O pour obtenir A_{n+1}. Cette opération peut se faire à l'aide d'un compas en reportant une longueur correspondant à θ.

Exercice 3

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

1. À l'aide de la calculatrice, on calcule $P(98 \leqslant X \leqslant 102) \simeq 0,9545$ à 10^{-4} près.
2. Centrons et réduisons l'évènement afin d'obtenir l'intervalle équivalent portant sur la variable centrée réduite :

$$\begin{aligned} 98 \leqslant X \leqslant 102 &\iff 98-100 \leqslant X-100 \leqslant 102-100 \\ &\iff \frac{-2}{\sigma} \leqslant \frac{X-100}{\sigma} \leqslant \frac{2}{\sigma} \end{aligned}$$

Posons $Z = \dfrac{X-100}{\sigma}$. Nous savons que $Z \sim \mathcal{N}(0;\ 1)$ et que $P\left(\dfrac{-2}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) = 2P\left(Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) - 1$.

Cherchons u tel que $2P(Z \leqslant u) - 1 = 0,97$, soit $P(Z \leqslant u) = 0,985$. À la calculatrice, on obtient $u \simeq 2,1701$ à 10^{-4} près.

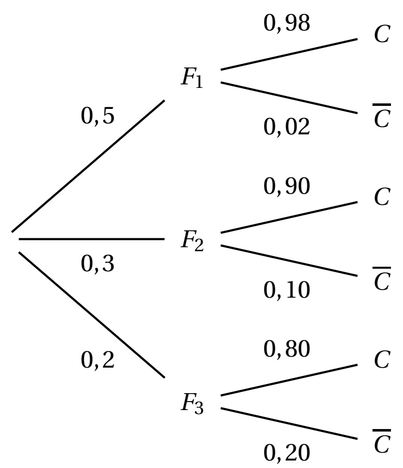
Ainsi, $\dfrac{2}{\sigma} = u$, ce qui donne $\sigma = \dfrac{2}{u} \simeq 0,9216$ à 10^{-4} près.

> Il faut absolument retenir le lien entre la probabilité sur un intervalle centré $P(Z \in [-u_\alpha;\ u_\alpha]) = 1-\alpha$ et la valeur de la fonction de répartition :
> $P(Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
> On peut retrouver rapidement cette formule en faisant un petit dessin permettant de déterminer les probabilités des queues de distribution, toutes deux égales à $\dfrac{\alpha}{2}$.

Partie B Contrôle à la réception

1. On cherche à déterminer $P_C(F_1) = \dfrac{P(C \cap F_1)}{P(C)}$.

Faisons un arbre afin de modéliser la situation. On donne les probabilités à partir des hypothèses de l'énoncé.



Calculons $P(C)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

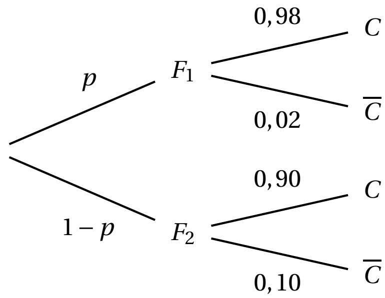
$$P(C) = P_{F_1}(C)P(F_1) + P_{F_2}(C)P(F_2) + P_{F_3}(C)P(F_3)$$

On obtient, après calcul, $P(C) = 0,92$.

D'autre part, $P(C \cap F_1) = P_{F_1}(C)P(F_1)$, ce qui donne, après calcul, $P(C \cap F_1) = 0,49$.

Finalement, on obtient $P_C(F_1) = \dfrac{0,49}{0,92} \simeq 0,532\,6$ à 10^{-4} près.

2. Faisons un arbre qui résume la nouvelle situation :



En reprenant la formule des probabilité totale, on cherche p tel que $P(C) = 0,92$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} 0,98p + 0,9(1-p) = 0,92 &\iff 0,08p = 0,02 \\ &\iff p = \frac{0,02}{0,08} = 0,25 \end{aligned}$$

L'entreprise doit donc acheter au minimum 25% de ses fèves au premier fournisseur.

Exercice 4

Partie A

1. La fonction est la somme des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x-3$, toutes deux strictement croissantes sur $]0;\ +\infty[$, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle.

> On pouvait également dériver la fonction u et constater que la dérivée est strictement positive sur l'intervalle considéré.

2. Remarquons que la fonction ln conserve les inégalités strictes puisqu'elle est strictement croissante.
Calculons $u(2) = \ln(2) - 1$ or $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$ car $\mathrm{e} > 2$. On prouve ainsi que $u(2) < 0$.
D'autre part, $u(3) = \ln(3)$ or $\ln(3) > \ln(1) = 0$ car $3 > 1$, ce qui montre que $u(3) > 0$.
Notons également que u est continue comme somme de fonctions continues.
Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.
0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle $[2;\ 3]$. Comme u est strictement monotone sur $]0;\ +\infty[$, cet antécédent α est unique sur $]0;\ +\infty[$.

> Ici, on pouvait également expliquer que l'on constate à la calculatrice que $u(2) < 0$ et $u(3) > 0$. Mais cet argument est nettement moins satisfaisant d'un point de vue du raisonnement.

3. Compte-tenu du sens de variation de u, on a :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	-	0	+	

Partie B

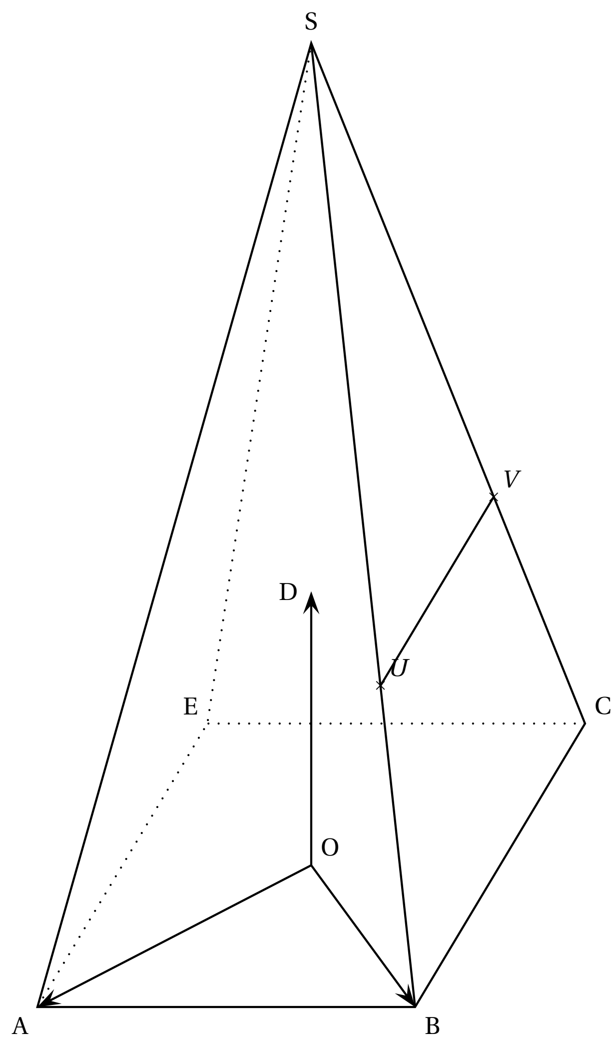
1. Nous savons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$. Par opérations sur les limites, on en déduit que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$
2. (a) f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0;\ +\infty[$.
   Pour tout $x > 0$:
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x)-2) + \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}. \text{ En réduisant au dénominateur } x^2 :\\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x)-2+x-1)\\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x)+x-3)\\ &= \frac{1}{x^2}u(x)\end{aligned}$$
   (b) Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Ainsi le signe de f' est celui de u. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0;\ \alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha;\ +\infty]$.

Partie C

1. Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient aux deux courbes à la fois lorsque :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} y &=& f(x)\\ y &=& \ln(x)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \ln(x)\\ f(x) &=& \ln(x)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \ln(x)\\ 0 &=& f(x)-\ln(x)\end{array}\right.$$
   On calcule :
   $$\begin{aligned} f(x)-\ln(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2-\ln(x). \text{ On réduit au dénominateur } x :\\ &= \frac{1}{x}[(x-1)(\ln(x)-2)+2x-x\ln(x)]\\ &= \frac{1}{x}[x\ln(x)-2x-\ln(x)+2+2x-x\ln(x)]\\ &= \frac{1}{x}(2-\ln(x))\end{aligned}$$
   Or $2-\ln(x) = 0$ n'a qu'une solution qui est $x = \mathrm{e}^2$.
   Les deux courbes se coupent donc en un unique point d'abscisse $x = \mathrm{e}^2$ et d'ordonnée $y = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2$.
2. On utilise la linéarité de l'intégrale :
   $$\begin{aligned} I &= \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2-\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
   Or ln est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et H est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. Ainsi :
   $$\begin{aligned} I &= 2\,[\ln(x)]_1^{\mathrm{e}^2} - [H(x)]_1^{\mathrm{e}^2}\\ &= 2\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)-\ln(1)\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)^2 - \ln(1)^2\right)\\ &= 2\end{aligned}$$
   L'aire délimitée par $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$ est donc égale à 2.

Annexe

Annexe 1 (Exercice 1)



Annexe 2 (Exercice 2)