

Durée : 4 heures

A. P. M. E. P.

Correction du Baccalauréat S Centres étrangers  
10 juin 2015

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.  
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

1. La probabilité qu'un cadenas soit défectueux est  $p = 0,003$ . La taille de l'échantillon est  $n = 500$ .

On a  $n = 500 \geq 30$ ,  $np = 15 \geq 5$  et  $n(1 - p) = 485 \geq 5$ .

Les conditions sont alors vérifiées pour appliquer la formule donnant l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I_{500} = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$
$$= \left[ 0,03 - 1,96 \frac{\sqrt{0,03 \times 0,97}}{\sqrt{500}} ; 0,03 + 1,96 \frac{\sqrt{0,03 \times 0,97}}{\sqrt{500}} \right], \text{ soit environ } [0,015 ; 0,045].$$

La fréquence observée de cadenas défectueux est

$$f = \frac{19}{500} = \frac{38}{1000} = 0,038 \in I_{500}.$$

Ce contrôle ne remet donc pas en cause, au risque de 95 %, l'affirmation du fournisseur.

2. La fréquence de cadenas défectueux est  $f = \frac{39}{500} = \frac{78}{1000} = 0,078$ . La taille de l'échantillon est  $n = 500$ .

On a  $n = 500 \geq 30$ ,  $nf = 39$  et  $n(1 - f) = 461 \geq 5$ .

Les conditions sont réunies pour appliquer la formule donnant l'intervalle de confiance au seuil de 95 %.

$$I'_{500} = \left[ f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}} ; 0,078 + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,033 ; 0,123].$$

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre  $X$  de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne  $\mu = 750$  et d'écart-type  $\sigma = 25$ .

1.  $P(725 \leq X \leq 775) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68,3\%$ , soit 0,683 (d'après le cours).

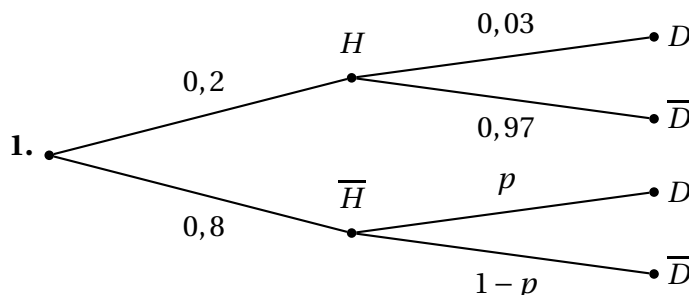
On peut aussi effectuer le calcul à la calculatrice.

2. On cherche donc le plus petit entier  $n$  tel que  $P(X \geq n) < 0,05$ .

Cela équivaut à  $1 - P(X < n) < 0,05 \iff P(X < n) > 0,95$ .

À la calculatrice, on cherche le nombre réel  $\alpha$  vérifiant  $P(X \leq \alpha) = 0,05$  :  
 $n$  est le plus petit entier supérieur ou égal à  $\alpha$  ; on en déduit  $n = 792$ .

### Partie C



2. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(D) = P_H(D) \times P(H) + P_{\bar{H}}(D) \times P(\bar{H}) = 0,2 \times 0,003 + 0,8p = \boxed{0,006 + 0,8p}.$$

Or,  $P(D) = 0,07$ . On en déduit que  $0,006 + 0,8p = 0,07$  donc  $p = \frac{0,07 - 0,006}{0,8}$

$$= \frac{0,064}{0,8} = \frac{64}{800} = \frac{8}{100} = \boxed{0,08}.$$

$0,08 \in [0,033 ; 0,123]$ , donc ce résultat est cohérent avec le résultat de la question A-2.

$$3. P_{\bar{D}}(H) = \frac{P(H \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0,2 \times 0,97}{1 - 0,07} = \frac{0,194}{0,93} \approx \boxed{0,209}.$$

### Exercice 2

4 points

Commun à tous les candidats

#### 1. Affirmation 1 :

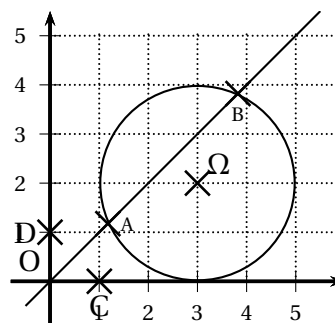
Notons C et D les points d'affixes respectives 1 et i. Alors :  $|z - 1| = |z - i| \iff |z_M - z_C| = |z_M - z_D|$   
 $\iff MC = MD$ .

L'ensemble des points M d'affixe  $z$  vérifiant  $|z - 1| = |z - i|$  est donc la médiatrice de [CD], c'est-à-dire la droite d'équation  $y = x$ .

Notons  $\Omega$  le point de coordonnées (3 ; 2) qui a donc pour fixe  $3 + 2i$ .

$|z - 3 - 2i| \leq 2 \iff |z_M - z_\Omega| \leq 2 \iff M\Omega \leq 2$ . S est donc bien le segment [AB]

L'ensemble S est le segment [AB]. **VRAI**



**2. Affirmation 2 :** Soit  $a = \sqrt{3} + i$ .

$$|a| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\text{Alors } a = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\text{On en déduit que } (\sqrt{3} + i)^{1515} = \left( 2e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^{1515} = 2^{1515} e^{i\frac{1515\pi}{6}} = 2^{1515} e^{i\frac{503\pi}{2}}.$$

$$\text{Or } \frac{503\pi}{2} = \frac{4 \times 125 + 3}{2} = 125 \times 2\pi + \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{On en déduit que } a^{1515} = 2^{1515} e^{i(125 \times 2\pi + \frac{3\pi}{2})} = 2^{1515} e^{i\frac{3\pi}{2}} \notin \mathbb{R}. \text{ FAUX}$$

**3. Affirmation 3 :**  $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 7 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  est la représentation paramétrique

d'une droite.

Pour  $t = 1$ , on obtient les coordonnées de E et pour  $t = \frac{1}{2}$ , on obtient les coordonnées de F

E et F appartiennent à cette droite, donc cette droite est bien la droite (EF).

**VRAI**

**4. Affirmation 4 :** On a  $E(2; 1; -3)$ ,  $F(1; -1; 2)$  et  $G(-1; 3; 1)$ .

Les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{EF}$  et  $\overrightarrow{EG}$  ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -1 \times (-3) + (-2) \times 2 + 5 \times 2 = 3 - 4 + 20 = 19.$$

$$EF = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{30}; EG = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$

On a alors :

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos(\widehat{FEG}) \text{ donc } \cos(\widehat{FEG}) = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}}{EF \times EG} = \frac{19}{\sqrt{30} \times \sqrt{29}} = \frac{19}{\sqrt{870}}.$$

À la calculatrice, on trouve  $\widehat{FEG} \approx 49,89^\circ \approx 50^\circ$ . **VRAI**

### Exercice 3

**7 points**

#### Commun à tous les candidats

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = a \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

1. Soit  $g$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

a)  $g$  est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1 = \left( 2(e^x)^2 - e^x - 1 \right) = 2X^2 - X - 1 \text{ en posant } X = e^x.$$

$2X^2 - X - 1$  a pour racines 1 et  $-\frac{1}{2}$  donc  $2X^2 - X - 1 = 2(X - 1)\left(X + \frac{1}{2}\right) = (X - 1)(2X + 1)$ .

On en déduit :  $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$

- b) Pour tout  $x$  réel,  $e^x > 0$  donc  $2e^x + 1 > 0$  donc  $g'(x)$  est du signe de  $(e^x - 1)$ .

$e^{x-1} = 0$  pour  $x = 0$  et  $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$ .

On en déduit le tableau de variation de  $g$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$g(x)$			

$g$  a donc pour minimum 0, atteint pour  $x = 0$ .

- c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = (e^{2u_n} - e^{u_n}) - u_n = g(u_n) \geq 0$  puisque le minimum de  $g$  est 0.

On en déduit que la suite  $(u_n)$  est **croissante**.

2. Dans cette question, on suppose que  $a \leq 0$ .

- a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 0$ .

— **Initialisation** :  $u_0 = a \leq 0$  donc la propriété est vraie au rang 0.

— **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un rang  $n$  quelconque, donc  $u_n \leq 0$ .

On a :  $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$ .

D'après l'hypothèse de récurrence,  $u_n \leq 0$  donc  $e^{u_n} \leq 1$  d'où  $e^{u_n} - 1 \leq 0$ .

Comme  $e^{u_n} > 0$ , on en déduit que  $u_{n+1} \leq 0$ .

La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n$ .

- b) La suite  $(u_n)$  est alors croissante et majorée par 0, donc convergente vers un réel  $\ell \geq 0$ .

- c) On suppose que  $a = 0$ . Le premier terme de la suite vaut 0. La suite est croissante et majorée par 0, donc tous les termes de la suite valent 0 et la suite **converge vers 0**.

3. Dans cette question, on suppose que  $a > 0$ .

La suite  $(u_n)$  étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq a$ .

- a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ .

Comme  $u_n \geq a > 0$ , tous les termes de la suite sont positifs. D'après les variations de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ , on a  $g(u_n) \geq g(a)$  donc  $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$ .

- b) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq a + n \times g(a)$ .

— **Initialisation** : Pour  $n = 0$ ,  $a + n \times g(a) = a + 0 \times g(a) = a$ ; or  $u_n \geq a$ , donc la propriété est vraie au rang  $n = 0$ . La propriété est initialisée.

— **Hérédité** : on suppose que, pour un entier  $n$  quelconque,

$$u_n \geq a + n \times g(a).$$

$$\text{Alors : } u_{n+1} - u_n = g(u_n) \iff u_{n+1} = u_n + g(u_n)$$

$$\geq (a + n \times g(a)) + g(u_n) \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence).}$$

Or  $u_n \geq a > 0$  donc  $g(u_n) \geq g(a)$  puisque la fonction  $g$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

$$\text{Par conséquent } \geq (a + n \times g(a)) + g(u_n) \geq a + n \times g(a) + g(a) \\ = a + (n + 1)g(a).$$

La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n$ , donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \geq a + n \times g(a)$ .

c)  $a > 0$  donc  $g(a) > g(0) = 0$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$   
d'après le théorème des gendarmes.

4. Dans cette question, on prend  $a = 0,02$ .

D'après la question précédente, la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .

a) La partie à compléter de l'algorithme est :

Tant que  $u \leq M$

$u$  prend la valeur  $e^u (e^u - 1)$

$n$  prend la valeur  $n + 1$

Fin Tant que

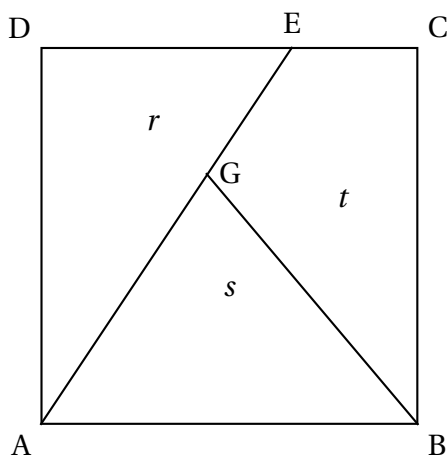
b) Pour  $M = 60$ , on trouve  $n = 36$

## Exercice 4

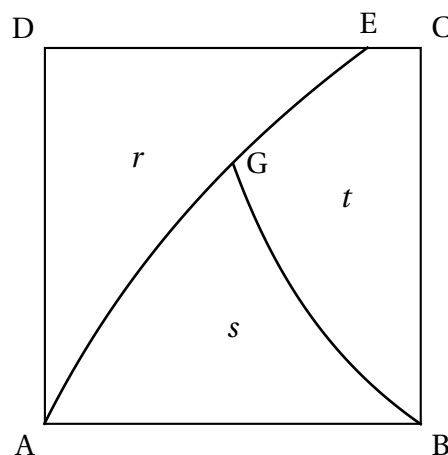
5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ .

**Partie A : étude de la proposition A**

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales :  $r = s = t = \frac{1}{3}$ .

L'aire du triangle ADE est  $\mathcal{A}(ADE) = \frac{AD \times DE}{2} = \frac{1 \times DE}{2}$ . Comme cette aire vaut  $\frac{1}{3}$ , on obtient  $DE = \frac{2}{3}$ .

Le point E a pour coordonnées :  $E\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ .

Appelons H le pied de la hauteur issue de G dans le triangle AGB.

L'aire du triangle AGB vaut :  $\mathcal{A}(AGB) = \frac{AB \times GH}{2} = \frac{GH}{2}$ . Comme cette aire vaut  $\frac{1}{3}$ , on obtient  $GH = \frac{2}{3}$ .

>l'ordonnée de G vaut  $y_G = \frac{2}{3}$ .

L'équation de la droite (AE) est  $y = \frac{3}{2}x$  puisque la droite passe par l'origine et que, pour  $x = x_E = \frac{2}{3}$ , on trouve  $y = y_E = 1$ .

L'abscisse de G  $x_G$  vérifie donc  $\frac{3}{2}x_G = \frac{2}{3}$  donc  $x_G = \frac{4}{9}$ . Le point G a donc pour coordonnées :  $G\left(\frac{4}{9}; \frac{2}{3}\right)$ .

**Partie B : étude de la proposition B**

1. a)  $f(x_E) = 1 \iff \ln(2x_E + 1) = 1 \iff 2x_E + 1 = e \iff x_E = \frac{e-1}{2}$ .

b) G appartient à la courbe  $\mathcal{C}_f$  donc  $y_G = f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right) = \ln 2$ .

On doit alors avoir  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$ , c'est-à-dire  $k \times \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \ln 2 \iff$

$k = \ln 2$  donc  $f(x) = \ln 2 \left(\frac{1-x}{x}\right)$

2. a) Soit  $F : x \mapsto F(x) = (x+0,5) \times \ln(2x+1) - x$  pour  $x \geq 0$ .

$$F'(x) = 1 \times \ln(2x+1) + (x+0,5) \times \frac{2}{2x+1} - 1 = \ln(2x+1) + \frac{2x+1}{2x+1} - 1$$

$$= \ln(2x+1) + 1 - 1 = \boxed{\ln(2x+1) = f(x)}.$$

$F$  est bien une primitive de  $f$ .

b)  $r$  est l'aire du domaine compris entre les courbes représentatives de la fonction  $x \mapsto 1$ , de  $f$  et les droites d'équation  $x=0$  et  $x = \frac{e-1}{2}$ .

$$\text{Ainsi : } r = \int_0^{\frac{e-1}{2}} (1-f(x)) \, dx = \frac{e-1}{2} - \int_0^{\frac{e-1}{2}} f(x) \, dx = \frac{e-1}{2} - \left[ F\left(\frac{e-1}{2}\right) - F(0) \right].$$

$$F\left(\frac{e-1}{2}\right) = \frac{e}{2} \times \ln e - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2} = \boxed{\frac{e}{2} - 1}$$

$$F(0) = 0$$

$$\text{On en déduit : } r = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{e}{2} - 1}$$

3.  $g(x) = \ln 2 \left(\frac{1-x}{x}\right) = \ln 2 \left(\frac{1}{x} - 1\right)$  donc une primitive  $G$  de  $g$  est définie par

$$\boxed{G(x) = \ln 2(\ln x - x)}.$$

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que

$$s = [\ln(2)]^2 + \frac{\ln(2) - 1}{2}.$$

$$\boxed{r \approx 0,359} \text{ et } \boxed{s \approx 0,327}. \text{ On en déduit } t = 1 - (r + s) \approx \boxed{0,314}.$$

La proposition B vérifie donc les conditions imposées par le fabriquant.

**Exercice 4****5 points****Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité****Partie A : généralités**

1. Soit  $(x ; y ; z)$  un TP et soit  $p$  un entier naturel non nul.

$$\text{On a donc } x^2 + y^2 = z^2. \text{ Alors } (px)^2 + (py)^2 = p^2 x^2 + p^2 y^2 = p^2 (x^2 + y^2) \\ = p^2 z^2 = (pz)^2 \text{ donc } (px ; py ; pz) \text{ est aussi un TP.}$$

2. On suppose que  $(x ; y ; z)$  est un TP donc  $x^2 + y^2 = z^2$ .  
 Supposons les trois entiers impairs. Alors  $x \equiv 1 [2]$ ,  $y \equiv 1 [2]$  et  $z \equiv 1 [2]$ .  
 On a  $x^2 \equiv 1 [2]$ ,  $y^2 \equiv 1 [2]$  et  $z^2 \equiv 1 [2]$ , d'où  $x^2 + y^2 \equiv 0 [2]$  donc on n'aurait pas  $x^2 + y^2 = z^2$ .  
 Les trois entiers ne peuvent pas être tous impairs.
3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul  $n$  peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :  
 $n = 2^\alpha \times k$  où  $\alpha$  est un entier naturel (éventuellement nul) et  $k$  un entier naturel impair.
- a)  $192 = 2^6 \times 3$ .
- b) Soient  $x$  et  $z$  deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont  $x = 2^\alpha \times k$  et  $z = 2^\beta \times m$ .  
 $2x^2 = 2 \times (2^\alpha \times k)^2 = 2 \times 2^{2\alpha} \times k^2 = 2^{2\alpha+1} \times k^2$   
 $z^2 = (2^\beta \times m)^2 = 2^{2\beta} \times m^2$
- c) Si  $2x^2 = z^2$ , alors  $2^{2\alpha+1} \times k^2 = 2^{2\beta} \times m^2$  donc  $2\alpha + 1 = 2\beta$  (unicité de la décomposition).  
 C'est impossible puisque  $2\alpha + 1$  est impair et  $2\beta$  est pair.

### Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1.  $2015 = 5 \times 13 \times 31$  ;  
 On connaît le TP  $(3 ; 4 ; 5)$  donc  $(13 \times 31 \times 3 ; 13 \times 31 \times 4 ; 13 \times 31 \times 5)$  est aussi un TP, donc  $(1\ 209 ; 1\ 612 ; 2\ 015)$  est aussi un TP.
2. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$ .  
 $2015 = 2 \times 1007 + 1$ .  
 Ainsi, d'après la remarque faite ci-dessus, le triplet  
 $(2015 ; 2 \times 1007^2 + 2 \times 1007 ; 2 \times 1007^2 + 2 \times 1007 + 1) =$   
 $(2015 ; 2\ 030\ 112 ; 2\ 030\ 113)$  est un TP.
3. a) On cherche  $x$  et  $z$  entiers tels que  $z^2 - x^2 = 403^2$ , c'est-à-dire  
 $(z - x)(z + x) = 169 \times 961$ .  
 Résolvons le système  $\begin{cases} z - x = 169 \\ z + x = 961 \end{cases}$   
 En additionnant et en soustrayant, on trouve  $z = 565$  et  $x = 396$ .
- b) Le triplet  $(396 ; 403 ; 565)$  est un TP donc  $(5 \times 396 ; 5 \times 403 ; 5 \times 565)$  est également un TP.  
 Par conséquent  $(1\ 980 ; 2\ 015 ; 2\ 825)$  est un TP.