

❧ Corrigé du baccalauréat S Métropole 22 juin 2015 ❧

EXERCICE 1

6 POINTS

Partie 1

1. a. Soient c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.
 Par définition, $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} = [-e^{-\lambda x}]_c^d$
 $= -e^{-\lambda d} - (-e^{-\lambda c}) = \boxed{e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}}$.
- b. $P(X > 20) = 0,05 \iff P(0 \leq X \leq 20) = 0,95 \iff e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times 20} = 0,95$
 $\iff 1 - e^{-20\lambda} = 0,95 \iff e^{-20\lambda} = 0,05 \iff -20\lambda = \ln 0,05 \iff$
 $\lambda = \frac{\ln 0,05}{-20} \approx \boxed{0,150}$.
- c. On sait que l'espérance d'une loi exponentielle est $E(X) = \frac{1}{\lambda} \approx \boxed{6,676}$.

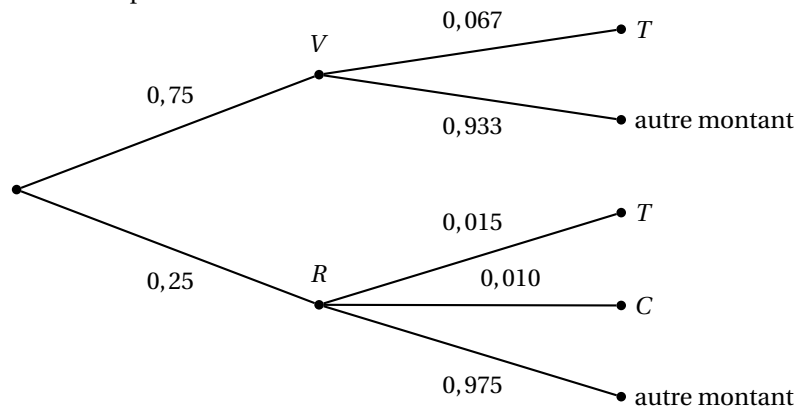
Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,15$.

- d. $P(10 \leq X \leq 20) = e^{-10\lambda} - e^{-20\lambda} = e^{-1,5} - e^{-3} \approx \boxed{0,173}$.
- e. $P(X > 18) = 1 - P(0 \leq X \leq 18) = e^{-18\lambda} = e^{-27} \approx \boxed{0,067}$.
2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.
- a. $P(20 \leq Y \leq 21) \approx \boxed{0,015}$.
- b. $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leq Y \leq 21) \approx \boxed{0,010}$.

Partie 2

1. Notons :
- R l'évènement « le bon d'achat est rouge ».
 - V l'évènement « le bon d'achat est vert ».
 - T : l'évènement « avoir un un bon d'achat de trente € ».
 - C : l'évènement « avoir un un bon d'achat de cent € ».
 - A : l'évènement « avoir un un bon d'achat d'une autre valeur ».
 - S : l'évènement « avoir un un bon d'achat d'un montant supérieur ou égal à 30 € ».

L'arbre correspondant est alors :



- On a : $P_R(S) = P_R(T \cup C) = p_R(T) + P_R(C) = 0,015 + 0,010 = \boxed{0,025}$.
2. $P(S) = P(R \cap S) + P(V \cap S) = 0,25 \times 0,025 + 0,75 \times 0,067 = 0,0566 \approx \boxed{0,057}$.
- Pour la question suivante, on utilise cette valeur.**

3. La probabilité d'avoir un bon d'un montant supérieur ou égal à 30 € est $p = 0,057$.

La fréquence observée est $f = \frac{6}{200} = \frac{3}{100} = 0,03$.

La taille de l'échantillon est $n = 200$.

On a $n = 200 \geq 30$; $np = 11,4 \geq 5$ et $n(1-p) = 188,6 \geq 5$.

On peut donc utiliser la formule donnant l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I_{200} = \left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,024 ; 0,090]$$

$f = 0,03 \in I$. Les doutes du directeur du magasin ne sont donc pas justifiés au seuil de confiance de 95 %.

EXERCICE 2

3 POINTS

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points $A(0; -1; 5)$, $B(2; -1; 5)$, $C(11; 0; 1)$, $D(11; 4; 4)$.

1. a. Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{OI}$.

La droite (AB) est donc parallèle à l'axe (OI) .

- b. On a $x_C = x_D = 11$ donc la droite (CD) est incluse dans le plan \mathcal{P} d'équation $x = 11$.

- c. (AB) est parallèle à (OI) et (OI) est orthogonale au plan \mathcal{P} donc (AB) est orthogonale à \mathcal{P} .

Le point d'intersection E a des coordonnées $(x; y; z)$ qui vérifient l'équation cartésienne de \mathcal{P} et la représentation paramétrique de \mathcal{P} .

$$\text{On doit avoir : } \begin{cases} x = 11 \\ x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases} \text{ donc } E(11; -1; 5).$$

- d. Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et une

$$\text{représentation paramétrique de } (CD) \text{ est } \begin{cases} x = 11 \\ y = 0,8t' \\ z = 1 + 0,6t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

$$\text{On résout le système } \begin{cases} t = 11 \\ -1 = 0,8t' \\ 5z = 1 + 0,6t' \end{cases} \text{ qui n'a pas de solutions, car}$$

on trouve t' négatif, donc $1 + 0,6t' < 5$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. a. $\overrightarrow{M_t N_t} \begin{pmatrix} 11-t \\ 0,8t+1 \\ 0,6t-4 \end{pmatrix}$ donc $M_t N_t^2 = (11-t)^2 + (0,8t+1)^2 + (0,6t-4)^2$
 $= 121 - 22t + t^2 + 0,64t^2 - 1,6t + 1 + 0,36t^2 - 4,8t + 16 =$
 $M_t N_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.

- b. $M_t N_t$ est positif, donc est minimale quand son carré est minimal.

On considère la fonction $f : t \mapsto 2t^2 - 25,2t + 138$; f est une fonction du second degré; le coefficient de t^2 est 2. Le minimum est atteint pour

$$t = \frac{25,2}{4} = 6,3.$$

La distance est **minimale** pour $t = 6,3$ s.

EXERCICE 3

5 POINTS

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit l'équation
- $z^2 - 8z + 64 = 0$
- .

$$\Delta = 64 - 4 \times 64 = -3 \times 64 < 0.$$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{8 + i\sqrt{3 \times 64}}{2} = \boxed{4 + 4i\sqrt{3}} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = \boxed{4 - 4i\sqrt{3}}.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives
- $a = 4 + 4i\sqrt{3}$
- ,
- $b = 4 - 4i\sqrt{3}$
- et
- $c = 8i$
- . (figure à la fin de l'exercice)

a. $|a| = |4 + 4i\sqrt{3}| = 4|1 + i\sqrt{3}| = 4 \times 2 = \boxed{8}$.

On en déduit $a = 8 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$. Un argument de a est donc $\frac{\pi}{3}$.

b. On a trouvé $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \bar{a} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

c. $|a| = 8$; $|b| = |\bar{a}| = |a| = 8$ et $|c| = |8i| = 8$. Les points A, B et C sont donc sur le cercle de centre 0 et de rayon 8.

d. Voir figure en fin d'exercice.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives
- $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$
- ,
- $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$
- et
- $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$
- .

a. $b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = \boxed{8}$.

b. $|a'| = |ae^{i\frac{\pi}{3}}| = |a| \times |e^{i\frac{\pi}{3}}| = |a| = \boxed{8}$ car $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout θ réel.

$$\arg(a') = \arg\left(ae^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \arg(a) + \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. a. On note
- r
- ,
- s
- et
- t
- les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A'B], [B'C] et [C'A].

On a : $r = \frac{a' + b}{2} = \frac{-4 + 4i\sqrt{3} + 4 - 4i\sqrt{3}}{2} = \boxed{0}$.

$$s = \frac{b' + c}{2} = \frac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i.$$

On a admis que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.

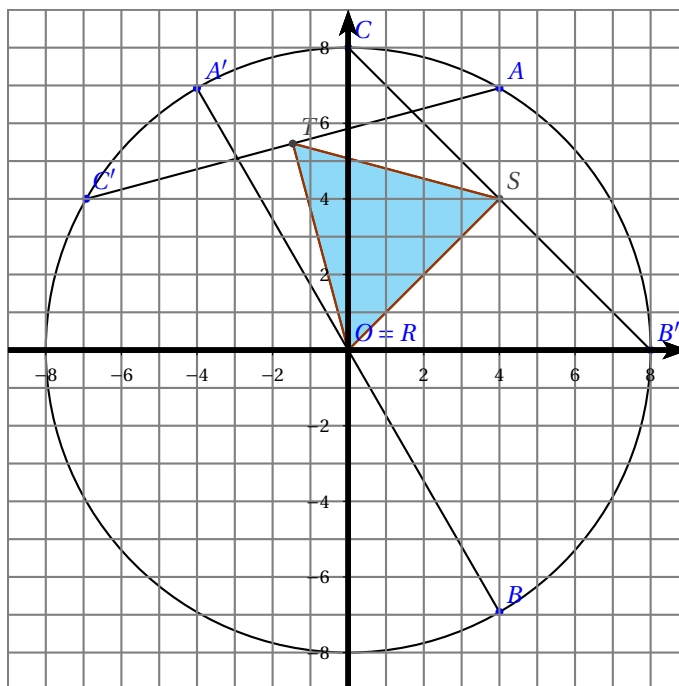
b. Il semble que la figure que RST soit un triangle équilatéral.

• $RS = |s - r| = |4 + 4i| = 4|1 + i| = \boxed{4\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} \bullet ST &= |t - s| = |-2 - 2\sqrt{3} + i(-2 + 2\sqrt{3})| = 2|-1 - \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})| \\ &= 2\sqrt{(-1 - \sqrt{3})^2 + (-1 + \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{(1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3)} = 2\sqrt{8} \\ &= \boxed{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet RT &= |t - s| = |-2 - 2\sqrt{3} + i(-2 + 2\sqrt{3})| \\ &= 2|-1 - \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})| = 2\sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3} = 2\sqrt{8} \\ &= \boxed{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

 $RS = ST = RT = 4\sqrt{2}$ donc le triangle RST est **équilatéral**.



EXERCICE 3

5 POINTS

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans \mathbb{Z} : $7x - 5y = 1$.

a. $7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$ donc $(3; 4)$ est solution de (E).

b. $(x; y)$ solution de (E) $\iff 7x - 5y = 1 \iff 7x - 21 = 5y - 20$
 $\iff 7(x - 3) = 5(y - 4)$

c. • Soit $(x; y)$ un couple d'entiers solution de (E), ce qui équivaut à $7(x - 3) = 5(y - 4)$.

$7(x - 3) = 5(y - 4)$ entraîne que 7 divise $5(y - 4)$; or 7 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y - 4$. Donc il existe un entier relatif k tel que $y - 4 = 7k$ ce qui équivaut à $y = 7k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Comme $7(x - 3) = 5(y - 4)$ et $y - 4 = 7k$, cela implique que $7(x - 3) = 5 \times 7k$ ce qui équivaut à $x - 3 = 5k$ ou encore $x = 5k + 3$.

Donc si $(x; y)$ est solution de (E), alors $\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$

• Réciproquement, si le couple d'entiers $(x; y)$ est tel que

$\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors $7x - 5y = 7(5k + 3) - 5(7k + 4) = 35k + 21 - 35k - 20 = 1$ donc $(x; y)$ est solution de (E).

• Donc les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que

$\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. On sait que $7x - 5y = 1$.

D'après la question 1, on peut dire que $x = 5k + 3$ et $y = 7k + 4$ avec k entier relatif. Le nombre de jetons est un nombre positif, et ne doit pas dépasser 25 qui est le nombre total de jetons dans la boîte.

Pour $k = 0$, $x = 3$ et $y = 4$; il peut donc y avoir 3 jetons rouges, 4 jetons verts et $25 - 3 - 4 = 18$ jetons blancs.

Pour $k = 1$, $x = 8$ et $y = 11$; il peut donc y avoir 8 jetons rouges, 11 jetons verts et $25 - 8 - 11 = 6$ jetons blancs.

Les autres valeurs de k ne donnent pas de résultats répondant au problème.

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. Comme au départ c'est-à-dire pour $n = 0$, le pion est en A, on peut dire que $X_0 = (1 \ 0 \ 0)$.

D'après le texte, on tire au hasard un pion dans la boîte, donc il y a équiprobabilité. Il y a 3 pions rouges sur 25 donc la probabilité de tirer un pion rouge est $\frac{3}{25} = 0,12$. On calcule de même la probabilité de tirer un pion vert : $\frac{4}{25} = 0,16$ et la probabilité de tirer un pion blanc : $\frac{18}{25} = 0,72$.

On cherche la probabilité a_{n+1} qu'à l'étape $n + 1$ le pion soit en A.

S'il était en A à l'étape n , il faut tirer une boule blanche pour qu'il y reste, ce qui se fait avec une probabilité de 0,72. Comme il avait une probabilité égale à a_n d'être en A à l'étape n , on retient $0,72a_n$.

S'il était en B à l'étape n , il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à b_n d'être en B à l'étape n , on retient $0,12b_n$.

S'il était en C à l'étape n , il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à c_n d'être en C à l'étape n , on retient $0,12c_n$.

On peut donc dire que : $a_{n+1} = 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n$.

On justifie de la même façon b_{n+1} et c_{n+1} et l'on a :

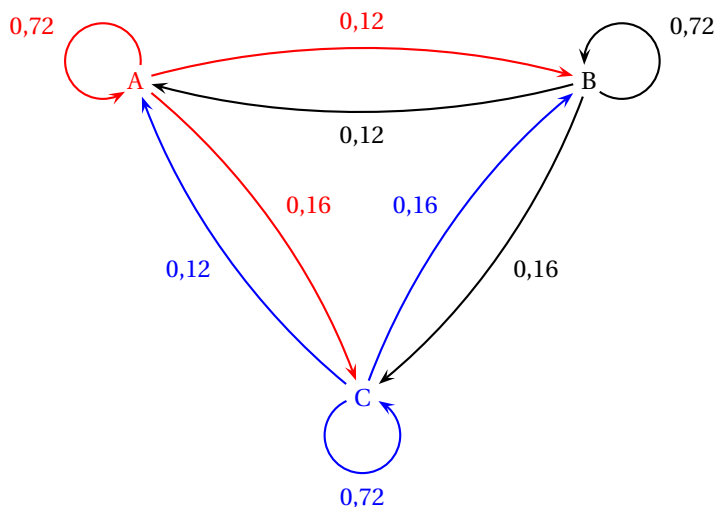
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n \\ b_{n+1} = 0,12a_n + 0,72b_n + 0,16c_n \\ c_{n+1} = 0,16a_n + 0,16b_n + 0,72c_n \end{cases}$$

ce qui donne sous forme matricielle

$$(a_{n+1} \ b_{n+1} \ c_{n+1}) = (a_n \ b_n \ c_n) \times \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,12 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } X_{n+1} = X_n T \text{ où } T = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,12 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$$

La situation décrite dans le texte peut être représentée par le graphe ci-dessous :



La matrice T est alors la matrice de transition de ce graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre A, B, C.

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$

a. On sait que $P = (P^{-1})^{-1}$; on cherche donc à la calculatrice l'inverse de la matrice P^{-1} et on trouve : $P = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

b. On va démontrer par récurrence sur n ($n \geq 1$) la propriété $\mathcal{P}_n : T^n = PD^n P^{-1}$.

- On sait que $T = PDP^{-1}$ donc $T = PD^1 P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

- On suppose la propriété vraie à un rang p ($p \geq 1$), c'est-à-dire $T^p = PD^p P^{-1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

On veut démontrer que la propriété est vraie au rang $p + 1$.

$T^{p+1} = T^p \times T$; d'après l'hypothèse de récurrence, $T^p = PD^p P^{-1}$ et on sait que $T = PDP^{-1}$. Donc $T^{p+1} = PD^p P^{-1} \times PDP^{-1} = PD^p P^{-1} PDP^{-1} = PD^{p+1} P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.

- La propriété est vraie au rang 1, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

On a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = PD^n P^{-1}$.

c. La matrice D est une matrice diagonale ; $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}$

On note $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ; ainsi $T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

On admet que $\alpha_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \frac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n , $X_n = X_0 T^n$.

a. $X_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ et $X_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$

$$\begin{aligned} X_n = X_0 T^n &\iff (a_n \quad b_n \quad c_n) = (1 \quad 0 \quad 0) \times \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \\ &\iff (a_n \quad b_n \quad c_n) = (\alpha_n \quad \beta_n \quad \gamma_n) \end{aligned}$$

Donc $a_n = \alpha_n$ et $b_n = \beta_n$. Or comme à chaque étape, le pion est soit en A, soit en B, soit en C, $a_n + b_n + c_n = 1$ et donc $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$.

b. $a_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0,6^n$; or $-1 < 0,6 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0$ d'où l'on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{10}$.

$b_n = \frac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$; or $-1 < 0,56 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,56^n = 0$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0$, on peut en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{37}{110}$.

$c_n = 1 - a_n - b_n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1 - \frac{3}{10} - \frac{37}{110} = \frac{4}{11}$.

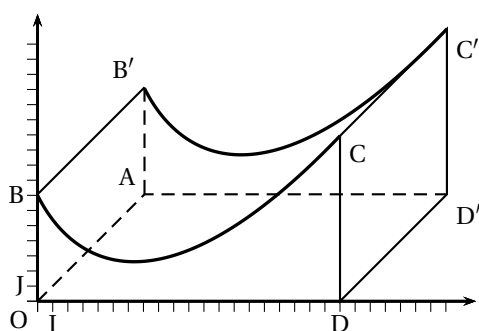
c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{10} = \frac{33}{110}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{37}{110}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{4}{11} = \frac{40}{110}$

Le sommet sur lequel on a le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations est le sommet qui a la plus grande probabilité au rang n ; c'est donc le sommet C.

EXERCICE 4

6 POINTS

Commun à tous les candidats



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.

Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères $OAD'D$, $DD'C'C$, et $OAB'B$ sont des rectangles.

Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, $DD' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J) .

Partie 1

1. $f = u \ln(u) + v$ avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = -2x+7$.

f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.

$$f' = u' \ln(u) + u \times \frac{u'}{u} + v' \text{ avec } u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = -3 \text{ d'où } f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \frac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3 \text{ donc } \boxed{f'(x) = \ln(x+1) - 2}.$$

2. $f'(x) = 0 \iff \ln(x+1) = 2 \iff x+1 = e^2 \iff x = e^2 - 1$.

$$f'(x) > 0 \iff \ln(x+1) > 2 \iff x+1 > e^2 \text{ (croissance de la fonction exp) d'où } x > e^2 - 1.$$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0	$e^2 - 1$	20
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	7	$f(e^2 - 1) \approx 2,6$	$f(20) \approx 10,93$

3. $f'(0) = 1 \ln(1) - 2 = \boxed{-2}$.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par

$$g'(x) = (x+1)\ln(x+1).$$

g est donc une primitive de $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$.

Une primitive de $x \mapsto 3x-7$ est $x \mapsto \frac{3x^2}{2} + 7x$.

une primitive de f est donc définie par :

$$F(x) = g(x) - \frac{3x^2}{2} + 7x = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3x^2}{2} + 7x =$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{7x^2}{4} + \frac{13}{2}x.$$

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P₁ : La différence entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est $f(20) - f(e^2 - 1) \approx 10,93 - 2,6 \approx 8,3 > 8$ donc P₁ est **vraie** ;

P₂ : L'inclinaison en B est 2. L'inclinaison en 20 est $f'(20) = \ln(21) - 2 \approx 1,04$, donc P₂ est **vraie**.

2. f est continue, donc la face avant, en unités d'aire, vaut

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^{20} f(x) dx = F(20) - F(0).$$

$$F(21) = \frac{21^2 \ln 21}{2} - 700 + 130 = \frac{441 \ln 21}{2} - 570.$$

$$F(0) = 0.$$

On en déduit $\mathcal{A}_1 = \frac{441 \ln 21}{2} - 570 \approx 101,3$.

L'aire latérale gauche vaut $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(OAB'B) = 10f(0) = 70$.

L'aire latérale droite vaut $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}(DD'C'C) = 10f(20) \approx 109,3$.

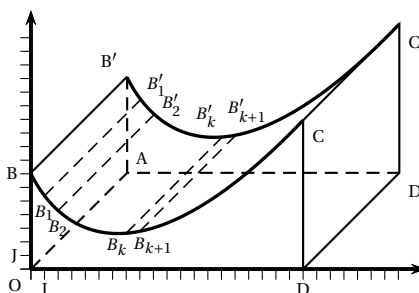
L'aire à peindre en rouge est donc $\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \approx 381,9 \text{ m}^2$.

Le nombre de litres de peinture à prévoir est $\frac{381,9}{5} \approx 77$.

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k ; f(k))$ pour k variant de 0 à 20.

Ainsi, $B_0 = B$.



a. $B_k B_{k+1} = \sqrt{1^2 + (f(k+1) - f(k))^2} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$.

b. La partie de l'algorithme à compléter est :

S prend la valeur 0.

Pour K allant de 0 à 19

S prend la valeur $S + 10\sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$

Afficher S