

# ⌘ Baccalauréat S Antilles-Guyane ⌘

20 juin 2016

## EXERCICE 1

5 points

### Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à  $10^{-4}$  près.

Les parties A et B sont indépendantes

### Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- $A$  : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- $B$  : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- $D$  : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
  - a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
  - b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.
  - c. L'ampoule tirée est sans défaut.  
Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.
2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.  
Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

### Partie B

1. On rappelle que si  $T$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda$  étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif  $a$ ,  $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$ .
  - a. Montrer que  $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$ .
  - b. Montrer que si  $T$  suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs  $t$  et  $a$  on a
$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$
2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire  $T$  qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.
  - a. Déterminer la valeur exacte du paramètre  $\lambda$  de cette loi.
  - b. Calculer la probabilité  $P(T \geq 5000)$ .
  - c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

### Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

**EXERCICE 2****3 points****Commun à tous les candidats**

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  tels que  $|z - 2| = 1$ .

1. Justifier que  $\mathcal{C}$  est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit  $a$  un nombre réel. On appelle  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = ax$ .  
Déterminer le nombre de points d'intersection entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  en fonction des valeurs du réel  $a$ .

**EXERCICE 3****7 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = xe^{1-x^2}$ .

1. Calculer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .  
*Indication : on pourra utiliser que pour tout réel  $x$  différent de 0,*  
 $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$ .  
On admettra que la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  est égale à 0.
2. a. On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $f'$  sa dérivée.  
Démontrer que pour tout réel  $x$ ,

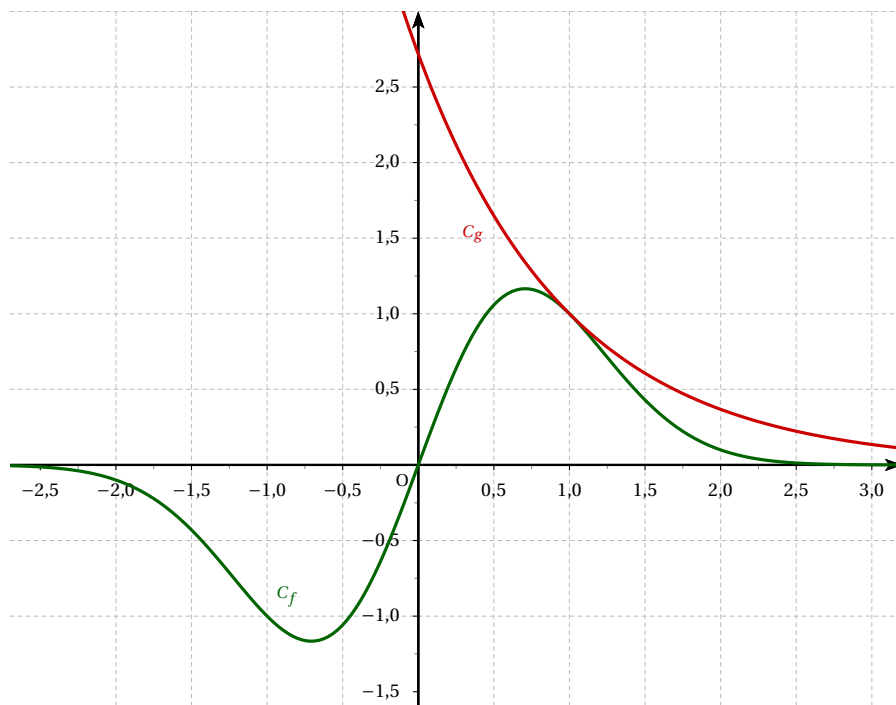
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

- b. En déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .

**Partie B**

On considère la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = e^{1-x}$ .

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $] -\infty ; 0]$ ,  $f(x) < g(x)$ .
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
On pose, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$ .
  - a. Montrer que, pour tout réel  $x$  strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que  $f(x) = g(x)$  équivaut à  $\Phi(x) = 0$ .

- b. On admet que la fonction  $\Phi$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ . Dresser le tableau de variation de la fonction  $\Phi$ . (Les limites en 0 et  $+\infty$  ne sont pas attendues.)
- c. En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Phi(x) \leq 0$ .
4.
  - a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
  - b. Montrer que  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ont un unique point commun, noté  $A$ .
  - c. Montrer qu'en ce point  $A$ , ces deux courbes ont la même tangente.

### Partie C

1. Trouver une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. En déduire la valeur de  $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$ .
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

**EXERCICE 4**  
**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**5 points**

$ABCDEFGH$  est un cube d'arête égale à 1.

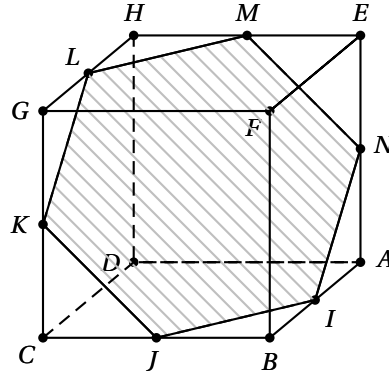
L'espace est muni du repère orthonormé  $(D; \vec{DC}, \vec{DA}, \vec{DH})$ .

Dans ce repère, on a :

$D(0; 0; 0)$ ,  $C(1; 0; 0)$ ,  $A(0; 1; 0)$ ,

$H(0; 0; 1)$  et  $E(0; 1; 1)$ .

Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ .



Soit  $\mathcal{P}$  le plan parallèle au plan  $(BGE)$  et passant par le point  $I$ .

On admet que la section du cube par le plan  $\mathcal{P}$  représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets  $I, J, K, L, M, N$  appartiennent respectivement aux arêtes  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CG]$ ,  $[GH]$ ,  $[HE]$  et  $[AE]$ .

1. a. Montrer que le vecteur  $\vec{DF}$  est normal au plan  $(BGE)$ .  
 b. En déduire une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$ .
2. Montrer que le point  $N$  est le milieu du segment  $[AE]$ .
3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(HB)$ .  
 b. En déduire que la droite  $(HB)$  et le plan  $\mathcal{P}$  sont sécants en un point  $T$  dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre  $FBGE$ .

**EXERCICE 4**  
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**5 points**

Les parties A et B sont indépendantes

**Partie A**

On considère l'équation suivante d'inconnues  $x$  et  $y$  entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1. \tag{E}$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières  $(x; y)$  de l'équation (E) vérifiant  $-5 \leq x \leq 10$  et  $-5 \leq y \leq 10$ .

```

Variables : X est un nombre entier
            Y est un nombre entier
Début :    Pour X variant de -5 à 10
            (1) .....
            (2) .....
            Alors Afficher X et Y
            Fin Si
            Fin Pour
            Fin Pour
Fin
    
```

2. a. Donner une solution particulière de l'équation (E).
- b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
- c. Déterminer l'ensemble des couples  $(x ; y)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que  $-5 \leq x \leq 10$  et  $-5 \leq y \leq 10$ .

### Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0$$

On définit la suite  $(A_n)$  de points du plan de coordonnées  $(x_n ; y_n)$  vérifiant pour tout  $n$  entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{cases}$$

1. On note  $M$  la matrice  $\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_{n+1} = MX_n$ .
  - b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n$  en fonction de  $M^n$  et  $X_0$ .
2. On considère la matrice  $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$  et on admet que la matrice inverse de  $P$ , notée  $P^{-1}$ , est définie par  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ .
    - a. Vérifier que  $P^{-1}MP$  est une matrice diagonale  $D$  que l'on précisera.
    - b. Pour tout entier naturel  $n$ , donner  $D^n$  sans justification.
    - c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $M^n = PD^nP^{-1}$ .
  3. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$ .  
En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , une expression de  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $n$ .
  4. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , le point  $A_n$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ .