EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} *près.*

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

— à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;

— à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

— A : « l'ampoule provient de la machine A » ;

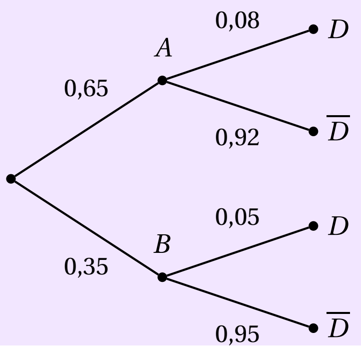
— B : « l'ampoule provient de la machine B » ;

— D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

Solution :



b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,930 5.

Solution : A et B forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a :

$P\left(\overline{D}\right) = P\left(\overline{D}\cap A\right) + P\left(\overline{D}\cap B\right) = P_A\left(\overline{D}\right)\times P(A) + P_B\left(\overline{D}\right)\times P(B) = 0{,}598 + 0{,}3325 = 0{,}9305$

c. L'ampoule tirée est sans défaut.
Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

Solution : On cherche $P_{\overline{D}}(A)$

$$P_{\overline{D}}(A) = \frac{P\left(\overline{D}\cap A\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{0{,}598}{0{,}9305} = \frac{1178}{1861} \approx 0{,}6427$$

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Solution : On répète $n = 10$ fois de manières indépendante une expérience n'ayant que deux issues : l'ampoule est sans défaut ou elle présente un défaut dont la probabilité de succès est $p = P\left(\overline{D}\right) = 0{,}92$.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'ampoules sans défaut alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(10\ ;\ 0{,}92)$

On cherche $P(X \geqslant 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = 10 \times 0{,}95^9 \times 0{,}08 + 0{,}92^{10} \approx 0{,}8121$.

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x$.

a. Montrer que $P(T \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

Solution :

$P(T \geqslant a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^a = 1 - \left[\left(-\mathrm{e}^{-\lambda a}\right) - (-1)\right] = 1 - \left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}\right] = \mathrm{e}^{-\lambda a}$

b. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a

$$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t + a) = P(T \geqslant a).$$

Solution :

$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t + a) = \dfrac{P\Big((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t + a)\Big)}{P(T \geqslant t)} = \dfrac{P(T \geqslant t + a)}{P(T \geqslant t)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+a)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda a} = P(T \geqslant a)$

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.

Solution : L'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$

On a donc $\dfrac{1}{\lambda} = 10000 \iff \lambda = 10^{-4}$

b. Calculer la probabilité $P(T \geqslant 5000)$.

Solution :

$P(T \geqslant 5000) = \mathrm{e}^{-5000 \times 10^{-4}} = \mathrm{e}^{-0,5} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 0,6065$

c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Solution : On cherche $P_{T \geqslant 7000}(T \geqslant 12000) = P_{T \geqslant 7000}(T \geqslant 7000 + 5000)$

D'après la question 1. b. on a donc $P_{T \geqslant 7000}(T \geqslant 12000) = P(T \geqslant 5000) \approx 0,6065$

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

Solution : La proportion $p = 0{,}06$ et la taille $n = 1\,000$ de l'échantillon vérifient :

$n \geqslant 30$, $np = 60 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 940 \geqslant 5$

On peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a ici $I = [0{,}0452\ ;\ 0{,}0748]$

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

Solution : Ici, la fréquence observée d'ampoules défectueuses est $f = 0{,}071$ et on a $f \in I$

donc on n'a pas de raison de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise

Exercice 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2| = 1$.

1. Justifier que $\mathscr{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

Solution : Soit $B(2)$ alors $|z-2| = 1 \iff BM = 1$

$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre $B(2)$ et de rayon 1 .

2. Soit a un nombre réel. On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = ax$.

Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ en fonction des valeurs du réel a.

Solution : Soit $z = x + \text{i}y$

$$\begin{cases} M(z) \in \mathscr{C} \\ M(z) \in \mathscr{D} \end{cases} \iff \begin{cases} |z-2| = 1 \\ z = x + \text{i}ax \end{cases} \iff \begin{cases} |(x-2) + \text{i}ax| = 1 \\ z = x + \text{i}ax \end{cases}$$

$|(x-2) + \text{i}ax| = 1 \iff (x-2)^2 + (ax)^2 = 1 \iff x^2(1+a^2) - 4x + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 12(1+a^2) = 4 - 12a^2$

$\Delta > 0 \iff a^2 < \dfrac{1}{3} \iff -\dfrac{\sqrt{3}}{3} < a < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

On en déduit que :

— si $a \in \left]-\infty\ ;\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ +\infty\right[$ alors $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ n'ont aucun point commun

— si $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou si $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ alors $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ ont un seul point d'intersection. Les deux droites $\mathscr{D}$ sont les tangentes à $\mathscr{C}$ passant par O

— si $a \in \left]-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$ alors $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ ont deux points communs distincts

Exercice 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0,
   $f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

Solution :
$\forall x \neq 0\,,\; f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$

or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} = +\infty$. De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{x} = 0$

Donc par produit, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

2. **a.** On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(1-2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

Solution : $f = u\mathrm{e}^v \Longrightarrow f' = u'\mathrm{e}^v + u\left(v'\mathrm{e}^v\right) = (u'+uv')\mathrm{e}^v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = 1-x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -2x \end{cases}$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\,,\; f'(x) = (1-2x^2)\mathrm{e}^{1-x^2}}$

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

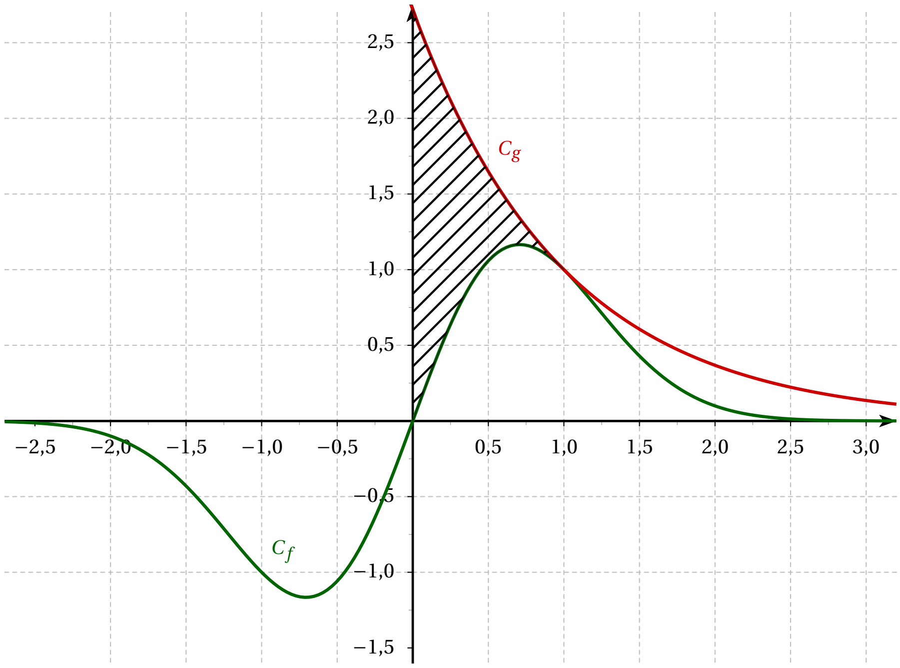
Solution : $\mathrm{e}^{1-x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $\left(1-2x^2\right) = \left(1-x\sqrt{2}\right)\left(1+x\sqrt{2}\right)$
on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$	$\searrow$	0

On remarque que f est impaire donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

Solution : Il semblerait que C_f soit toujours en dessous de C_g

2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\,0]$, $f(x) < g(x)$.

Solution : Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ et $\mathrm{e}^{1-x^2} > 0$
On en déduit que sur $]-\infty\,;\,0]$, $f(x) \leqslant 0$ et $g(x) > 0$
On a donc bien $\forall x \in]-\infty\,;\,0]$, $f(x) < g(x)$

3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$

Solution :
$f(x) \leqslant g(x) \Longleftrightarrow x\mathrm{e}^{1-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{1-x}$
si $x > 0$ alors cette inéquation est équivalente à $\ln\left(x\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^{1-x}\right)$ car la fonction ln est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$
$\ln\left(x\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^{1-x}\right) \Longleftrightarrow \ln(x) + \ln\left(\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^{1-x}\right) \Longleftrightarrow \ln(x) + 1 - x^2 \leqslant 1 - x \Longleftrightarrow \ln(x) - x^2 + x \leqslant 0$
Finalement si $x > 0$, $f(x) \leqslant g(x)$ équivaut à $\Phi(x) \leqslant 0$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

Solution :

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,,\ \Phi'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x + 1 = \dfrac{-2x^2+x+1}{x} = \dfrac{(x-1)(-2x-1)}{x} = \dfrac{(1-x)(2x+1)}{x}$

or sur $]0\,;\,+\infty[\,,\ \dfrac{2x+1}{x} > 0$ donc $\Phi'(x)$ est du signe de $(1-x)$

on en déduit le tableau

x	0		1		$+\infty$
$\Phi'(t)$	‖	$+$	0	$-$	
$\Phi(t)$	‖	↗	0	↘	

c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.

Solution :

Sur $]0\,;\,+\infty[$, Φ admet 0 pour maximum donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,,\ \Phi(x) \leqslant 0$

4. a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

Solution :

La conjecture est validée puisque l'on vient de montrer que $\Phi(x) \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ or on avait montré que $f(x) < g(x)$ sur $]-\infty\,;\,0]$

Finalement C_f est bien toujours en dessous de C_g sur $\mathbb{R}$

b. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.

Solution : $f(x) = g(x) \iff \Phi(x) = 0 \iff x = 1$

$A(1\,;\,1)$ est donc l'unique point commun de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Solution : g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$.

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,,\ g'(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$

alors $g'(1) = -1$ or $f'(1) = -1$

Donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent la même tangente en A

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = -\dfrac{1}{2}\left(-2x\mathrm{e}^{1-x^2}\right)$

donc $f = -\dfrac{1}{2}\left(u'\mathrm{e}^{u}\right)$ de plus f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, elle y admet donc des primitives

$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ F(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}$ est une primitive de f

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - x\,e^{1-x^2}\right) dx$.

Solution : Comme précédemment, on montre que $G(x) = -e^{1-x}$ est un primitive de g sur $\mathbb{R}$

$$\int_0^1 \left(e^{1-x} - x\,e^{1-x^2}\right) dx = \int_0^1 \left(g(x) - f(x)\right) dx = \left[G(x) - F(x)\right]_0^1 = (G(1) - F(1)) - (G(0) - F(0)) = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}e\right)$$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - x\,e^{1-x^2}\right) dx = \frac{1}{2}(e-1)}$

3. Interpréter graphiquement ce résultat.

Solution : Il s'agit de l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan définie par $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \end{cases}$

Cette aire est hachurée sur le graphique

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

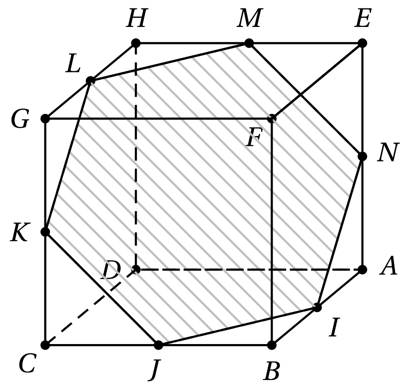
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH}\right)$.

Dans ce repère, on a :

$D(0\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,0\,;\,0)$, $A(0\,;\,1\,;\,0)$,

$H(0\,;\,0\,;\,1)$ et $E(0\,;\,1\,;\,1)$.



Soit I le milieu de $[AB]$.

Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

Solution : $B(1\,;\,1\,;\,0)$, $F(1\,;\,1\,;\,1)$ et $G(1\,;\,0\,;\,1)$

$\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

On a alors $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{DF} = 0$ et $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DF} = 0$

Donc $\boxed{\overrightarrow{DF} \text{ est normal au plan } (BGE)}$

b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

Solution : $\mathscr{P}$ est parallèle à (BGE) donc ils ont même vecteur normal $\overrightarrow{DF}$

on a alors $\mathscr{P} : x + y + z + d = 0$ or $I\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right) \in \mathscr{P}$ d'où $d = -\frac{3}{2}$

Finalement $\boxed{\mathscr{P} : 2x + 2y + 2z - 3 = 0}$

2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

Solution : $\mathscr{P}$ est parallèle à (BGE) donc le plan (ABE) coupe ces deux plans suivant deux droites parallèles or $\mathscr{P} \cap (ABE) = (IN)$ et $(BGE) \cap (ABE) = (BE)$
On en déduit que (BE) et (IN) sont parallèles or I est le milieu de $[AB]$ donc d'après le théorème de la droite des milieux, N est le milieu de $[AE]$

3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

Solution : $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $H(0\,;\,0\,;\,1)$ donc (HB) : $\left\{\begin{array}{l} x = t\\ y = t\\ z = 1-t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$

b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

Solution :
Chercher les cordonnées de l'éventuel point d'intersection entre (HB) et $\mathscr{P}$ revient à résoudre ce système :

$$\left\{\begin{array}{l} x = t\\ y = t\\ z = 1-t\\ 2x+2y+2z-3=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = t\\ y = t\\ z = 1-t\\ 2t=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\\ y = \frac{1}{2}\\ z = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

(HB) et $\mathscr{P}$ sont sécants en $T\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$

Remarque : ce point est le centre du cube

4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

Solution : $FBGE$ est une pyramide de base FBG et de hauteur EF

$$\mathcal{V}_{FBGE} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{FBG} \times EF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times FB \times FG \times EF = \frac{1}{6}$$

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1. \qquad \text{(E)}$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x\,;\,y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

Solution :

```
Variables :  X est un nombre entier
             Y est un nombre entier
Début :      Pour X variant de −5 à 10
                 Pour Y variant de −5 à 10
                     Si 7X-3Y=1
                     Alors Afficher X et Y
                     Fin Si
                 Fin Pour
             Fin Pour
Fin
```

2. **a.** Donner une solution particulière de l'équation (E).

Solution : $(x\ ;\ y) = (1\ ;\ 2)$ est une solution particulière de l'équation (E)

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Solution :

$$\begin{cases}(x\ ;\ y) \text{ solution de (E)}\\(1\ ;\ 2) \text{ solution de (E)}\end{cases} \iff \begin{cases}7x-3y=1\\7\times 1-3\times 2=1\end{cases} \iff \begin{cases}7(x-1)-3(y-2)=0\\(1\ ;\ 2) \text{ solution de (E)}\end{cases}$$

Donc $(x\ ;\ y)$ solution de (E) si et seulement si $7(x-1) = 3(y-2)$

On en déduit que 7 divise $3(y-2)$ or 7 et 3 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y-2$

Alors il existe un entier relatif k tel que $y-2 = 7k$, on en déduit $7(x-1) = 21k$ soit $x-1 = 3k$

Finalement les solutions de (E) sont les couples $(x\ ;\ y)$ de la forme $(1+3k\ ;\ 2+7k)$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$

c. Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

Solution : Pour $k < -2$ et $k > 3$ les valeurs trouvées pour x n'appartiennent pas à $[-5\ ;\ 10]$

Pour $k < -1$ et $k > 1$ les valeurs trouvées pour y n'appartiennent pas à $[-5\ ;\ 10]$

Finalement, il faut $k \in \{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$ et on obtient donc trois couples solution :

$(-2\ ;\ -5)$, $(1\ ;\ 2)$ et $(4\ ;\ 9)$

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$7x-3y-1=0$$

On définie la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n\ :\ y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\left\{\begin{array}{lll}x_0 & = & 1\\ y_0 & = & 2\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lll}x_{n+1} & = & -\frac{13}{2}x_n+3y_n\\ y_{n+1} & = & -\frac{35}{2}x_n+8yn\end{array}\right.$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix}\frac{-13}{2} & 3\\ \frac{-35}{2} & 8\end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n$.

Solution : $\begin{cases} x_{n+1} & = & -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} & = & -\frac{35}{2}x_n + 8yn \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, X_{n+1} = MX_n$

b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M^n et X_0.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, X_n = M^n X_0$

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P, notée P^{-1}, est définie par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

Solution : $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Donc $P^{-1}MP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ qui est une matrice diagonale .

b. Pour tout entier naturel n, donner D^n sans justification.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.

Solution : Soit I_2 la matrice identité d'ordre 2
$M^n = PD^nP^{-1} \iff P^{-1}(M^n)P = P^{-1}\left(PD^nP^{-1}\right)P \iff P^{-1}M^nP = I_2D^nI_2 = D^n$.

Alors $M^n = PD^nP^{-1} \iff D^n = P^{-1}M^nP$
Montrons donc que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, D^n = P^{-1}M^nP$

Initialisation : pour $n = 0$ $D^0 = I_2$ et $P^{-1}M^0P = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2$

Hérédité : Supposons que pour tout entier naturel k, $D^k = P^{-1}M^kP$
alors $D^{k+1} = D^k \times D = P^{-1}M^kP \times D = P^{-1}M^kP \times P^{-1}MP = P^{-1}M^{k+1}P$; la propriété est donc vraie au rang 0 et héréditaire à partir du rang $n = 0$ et est vérifiée à ce rang donc d'après le principe de récurrence on a bien
$\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}M^nP$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, M^n = PD^nP^{-1}$

3. On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -14+\frac{15}{2^n} & 6-\frac{6}{2^n} \\ -35+\frac{35}{2^n} & 15-\frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et y_n en fonction de n.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = X_n = M^n X_0 = \begin{pmatrix} -14+\frac{15}{2^n} & 6-\frac{6}{2^n} \\ -35+\frac{35}{2^n} & 15-\frac{14}{2^n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{ \begin{array}{lcl} x_n & = & -2+\dfrac{3}{2^n} \\ y_n & = & -5+\dfrac{7}{2^n} \end{array} \right.$

4. Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathscr{D}$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $7x_n - 3y_n - 1 = -14 + \dfrac{21}{2^n} + 15 - \dfrac{21}{2^n} - 1 = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathscr{D}$