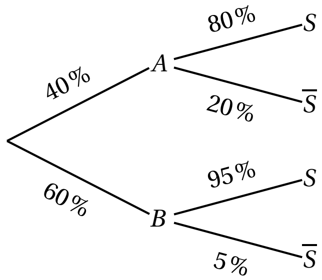
Un corrigé du
Baccalauréat S Métropole–La Réunion 20 juin 2016

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, on peut établir l'arbre pondéré ci-dessous :



On en déduit alors que $P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) = 40\,\% \times 80\,\% + 60\,\% \times 95\,\% = 0,89$

2. On cherche à calculer $P_S(A)$.
$P_S(A) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(A) \times P_A(S)}{0,89} = \dfrac{0\,\% \times 80\,\%}{0,89} = 0,36$ arrondi à 10^{-2}.

Partie B

1. Un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 % est $I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec $f = 0,92$ la fréquence observée dans l'échantillon et $n = 400$ la taille de l'échantillon.
On trouve donc ici $I = [0,87\ ;\ 0,97]$.

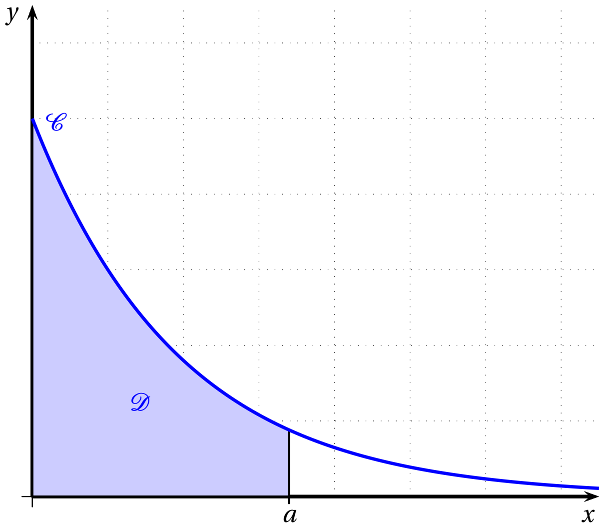
2. L'amplitude d'un tel intervalle de confiance sur un échantillon de taille n est égal à $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
On cherche donc n tel que

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,02 &\Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant \frac{2}{0,02} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 100 \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 10000 \end{aligned}$$

Il faudrait donc un échantillon de taille 10000 pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure à 0,02.

Partie C

1. a.



Grâce à la fonction de densité f donnée dans l'énoncé, $P(T \leqslant a)$ est l'aire en unité d'aire du domaine $\mathcal{D}$ hachuré délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

b. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

c. Comme $\lambda > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\lambda t = -\infty$. De plus $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$. On en déduit par composition que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$ puis par somme que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} P(T \leqslant t) = \lim_{t\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} = 1$.

2.

$$\begin{aligned}
P(T \leqslant 7) = 0,5 &\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-7\lambda} = 0,5\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-7\lambda} = 0,5\\
&\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,5)}{7}\\
P(T \leqslant 7) = 0,5 &\Leftrightarrow \lambda = 0,990 \text{ arrondi à } 10^{-3}
\end{aligned}$$

3. a. On cherche $P(T \geqslant 5) = 1 - P(T \leqslant 5) = \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,61$ arrondi au centième.

b. On cherche à calculer $P_{(T\geq 2)}(T \geqslant 7) = \dfrac{P\big((T \geq 2) \text{ ET } (T \geqslant 7)\big)}{P(T \geq 2)} = \dfrac{P(T \geqslant 7)}{P(T \geq 2)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-7\lambda}}{\mathrm{e}^{-2\lambda}} = \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,61$ arrondi au centième.

c. Comme T suit une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 10$ arrondi à l'unité.
Cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre de composants, la durée de vie moyenne d'un composant sera de 10 ans.

EXERCICE 2 — 4 POINTS

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points :

$$\mathrm{A}(1~;~2~;~3), \mathrm{B}(3~;~0~;~1), \mathrm{C}(-1~;~0~;~1), \mathrm{D}(2~;~1~;~-1), \mathrm{E}(-1~;~-2~;~3) \text{ et } \mathrm{F}(-2~;~-3, 4).$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés **FAUX**.

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(2~;~-2~;~-2)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(2~;~-2~;~-2)$.

Leurs deuxièmes coordonnées respectives sont égales mais pas leurs premières : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires.
On en conclut que les points A, B, et C ne sont pas alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\overrightarrow{n}\,(0\,;\,1\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC). **VRAI**.

Grâce aux coordonnées calculées dans la question précédente on peut aisément calculer $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0-2+2 = 0$ et $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0-2+2 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont non colinéaires.
On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(0\,;\,1\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC]. **VRAI**.

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}\,(-1\,;\,-1\,;\,1)$.
On en déduit $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{EF} = 0-1-1 = -2 \neq 0$ donc la droite (EF) est sécante au plan (ABC)
Notons I le milieu de [BC]. On a alors I(1 ;0 ;1) avec la formule des coordonnées du milieu d'un segment.
Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IF} = (-1\,;\,-1\,;\,1)$.
On constate que $\overrightarrow{IF} = 3\overrightarrow{EF}$ donc ces vecteurs sont colinéaires et donc $I \in (EF)$.
Nous avons donc bien montré que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection I est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes. **FAUX**.
À partir des coordonnées des vecteurs déjà calculées, on trouve les représentations paramétriques des droites (AB) et (CD).

$$\text{(AB)}\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y &=& 2-2t\\ z &=& 3-2t\end{array}\right. \text{ et (CD)}\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1+3t'\\ y &=& t'\\ z &=& 1-2t'\end{array}\right.$$

(AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si il existe deux paramètres t et t' qui donnent les mêmes coordonnées dans les 2 représentations paramétriques ci-dessus.
On résout alors par exemple le système constitué des deux premières lignes de chacune des représentations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 1+2t &=& -1+3t'\\ 2-2t &=& t'\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 1/2\\ t' &=& 1\end{array}\right.$$

Or en remplaçant ces valeurs dans les troisièmes égalités des représentations paramétriques on obtient $3-2t = 2 \neq -1 = 1-2t'$.
Cela signifie donc que (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

EXERCICE 3 — 5 POINTS

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow x - \ln\left(x^2+1\right) = x\\ &\Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right) = 0\\ &\Leftrightarrow x^2+1 = 1\\ f(x) = x &\Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

2. Limite en $-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$ et donc par somme, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - \ln(x^2+1) = -\infty$

Étude des variations de f

on calcule $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$
d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3. D'après son tableau de variations, la fonction f est strictement croissante sur $[0~;~1]$ et $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln 2 < 1$ donc pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$, $f(x) \in [0~;~1 - \ln 2] \subset [0~;~1]$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln\left(N^2 + 1\right) < A$ N prend la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

a. Pour tout réel A saisi par l'opérateur, cet algorithme cherche le plus petit entier naturel N tel que $f(N) \geqslant A$. Un tel entier existe toujours puisque $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. On fait tourner l'algorithme sur sa calculatrice (ou bien on affiche les valeurs successives de f sur les entiers grâce à la fonction « Table »de la machine) et on trouve que pour $A = 100$, le nombre N affiché par l'algorithme est 110.

Partie B

1. **Initialisation :** $u_0 = 1 \in [0~;~1]$.
Hérédité : Supposons que pour tout entier naturel k, $u_k \in [0~;~1]$
alors d'après la question **A.3.**, $u_{k+1} = f(u_k) \in [0~;~1]$
Conclusion : $u_0 \in [0~;~1]$ et pour tout entier naturel k, si $u_k \in [0~;~1]$, alors $u_{k+1} \in [0~;~1]$; on en déduit par principe de récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0~;~1]$.

2. Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$ d'où $u_{n+1} - u_n = \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.
On remarque que $u_n^2 + 1 \geqslant 1$ donc $\ln\left(u_n^2 + 1\right) \geqslant 0$.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc que la suite (u_n) est décroissante.

3. D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est décroissante (**2.**) et minorée par 0 (**1.**) donc la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.

4. On a résolu l'équation $f(x) = x$ à la question **A.1.**
$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = 0$ donc la suite (u_n) converge donc vers $\ell = 0$.

EXERCICE 3 **5 POINTS**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{2}{3}$.

a. Soit $(x,~y)$ un couple d'entiers relatifs alors $15x - 12y = 3(5x - 4y)$ et $5x - 4y \in \mathbb{Z}$ donc $15x - 12y$ est divisible par 3.

b. Supposons qu'un point de Δ_1 ait des coordonnées entières notées (x_1, y_1), alors on aurait $y_1 = \dfrac{5}{4}x_1 - \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 15x_1 - 12y_1 = 8$.
Or on a vu à la question précédente que $15x_1 - 12y_1$ est divisible par 3, on en conclurait donc que 8 est divisible par 3.
Cette dernière affirmation est fausse, c'est donc que notre supposition est fausse : aucun point de Δ_1 n'a des coordonnées entières.

Généralisation

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées $\left(x_0,\ y_0\right)$ où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

a. D'après l'énoncé on sait que la droite $\Delta : y = \dfrac{m}{n}x - \dfrac{p}{q}$ comporte un point de coordonnées $\left(x_0,\ y_0\right)$ où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs donc ces coordonnées vérifient l'équation de la droite
donc $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow ny_0 = mx_0 - \dfrac{np}{q} \Leftrightarrow ny_0 - mx_0 = \dfrac{np}{q}$
or on remarque que $ny_0 - mx_0$ est un entier, donc $\dfrac{np}{q}$ aussi et donc q divise np.

b. q divise np et q est premier avec p ($\text{pgcd}(p,\ q) = 1$) donc, d'après le théorème de Gauss, q divise n.

3. **a.** D'après l'énoncé, $\text{pgcd}(m, n) = 1$ et $n = qr$ donc $\text{pgcd}(m, qr) = 1$, donc $\text{pgcd}(qr, -m) = 1$ donc, d'après le théorème de Bezout, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $qru - mv = 1$.

b. On sait qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $qru - mv = 1$.
On a donc $nu - mv = 1$ d'où en multipliant les deux membres de cette égalité par rp on obtient $n(rpu) - m(rpv) = -rp$.
On pose $x_0 = rpv$ et $y_0 = rpu$.
On a alors $ny_0 - mx_0 = -rp \Leftrightarrow y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{rp}{n}$
et comme $n = qr$, on en déduit que $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q}$.

4. Soit Δ la droite d'équation $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{7}{4}$.
Vérifions que nous sommes dans le cadre d'utilisation de la question **3.** : on a ici $m = 3$, $n = 8$, $p = 7$ et $q = 4$.
On a bien $\text{pgcd}(m, n) = \text{pgcd}(p, q) = 1$ et $n = 8 = 2 \times 4 = 2q$ donc q divise n.
La question **3.b.** nous permet alors d'affirmer que la droite Δ possède un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

5. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	M, N, P, Q : entiers relatifs non nuls, tels que $\text{pgcd}(M,\ N) = \text{pgcd}(P,\ Q) = 1$ X : entier naturel
Entrées :	Saisir les valeurs de M, N, P, Q
Traitement et sorties :	
	Si Q divise N alors │ X prend la valeur 0 │ Tant que $\left(\dfrac{M}{N}X + \dfrac{P}{Q}\text{ n'est pas entier}\right)$ │ et $\left(-\dfrac{M}{N}X + \dfrac{P}{Q}\text{ n'est pas entier}\right)$ faire │ │ X prend la valeur $X + 1$ │ Fin tant que │ Si $\dfrac{M}{N}X + \dfrac{P}{Q}$ est entier alors │ │ Afficher $X, \dfrac{M}{N}X + \dfrac{P}{Q}$ │ Sinon │ │ Afficher $-X, -\dfrac{M}{N}X + \dfrac{P}{Q}$ │ Fin Si Sinon │ Afficher « Pas de solution » Fin Si

a. La seule chose à justifier pour que cet algorithme se termine est que la condition de la boucle « Tant que »se réalise et donc que la boucle s'arrête.
Pour toute entrée de M, N, P, Q, entiers relatifs non nuls tels que pgcd(M, N) = pgcd$(P, Q) = 1$, si Q divise N, d'après la question **3.b.**, la droite Δ possède un point de coordonnées entières que la boucle « Tant que »recherche de manière systématique (en parcourant toutes les abscisses entières positives et négatives par paire $\pm X$). Nous pouvons donc affirmer que cette boucle va d'arrêter au bout d'un nombre fini d'itérations.

b. L'algorithme permet de savoir si une droite $\Delta : y = \dfrac{M}{N}x - \dfrac{P}{Q}$ possède un point à coordonnées entières (résultat du « Si ») et si tel est le cas, l'algorithme recherche et affiche les coordonnées d'un tel point (résultat en sortie de la boucle « Tant que »). On peut d'ailleurs remarquer que le point affiché sera celui qui a l'abscisse la plus petite en valeur absolue.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

1. Le point T ne peut pas être en E sur le segment [EM], donc $x > 0$ dans tout l'exercice.
Dans le triangle ETA rectangle en E, $\tan\alpha = \tan\widehat{\text{ETA}} = \dfrac{\text{EA}}{\text{ET}} = \dfrac{25}{x}$.
De même dans le triangle ETB rectangle en E, et $\tan\beta = \tan\widehat{\text{ETA}} = \dfrac{\text{EB}}{\text{ET}} = \dfrac{30,6}{x}$
La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. La fonction tangente est dérivable sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et qui ne s'annulent pas sur cet intervalle.
Pour tout réel $x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $f'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$.
donc la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$

3. $\tan\gamma = \tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta \times \tan\alpha} = \dfrac{\dfrac{30,6}{x} - \dfrac{25}{x}}{1 + \dfrac{30,6 \times 25}{x^2}} = \dfrac{5,6x}{x^2 + 765}$.

4. L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale ce qui équivaut à dire que l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum lorsque $\tan\gamma$ est maximale car la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ (**2.**).
Notons $g(x) = \tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2 + 765}$
Calculons $g'(x) = 5,6\dfrac{1 \times (x^2 + 765) - x \times 2x}{(x^2 + 765)^2} = 5,6\dfrac{765 - x^2}{(x^2 + 765)^2}$
Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,50]$ par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.
Calculons $f'(x) = 1 - \dfrac{765}{x^2} = \dfrac{x^2 - 765}{x^2} = -\dfrac{765 - x^2}{x^2}$
On remarque que pour $x \in]0\,;\,50]$, $x^2 > 0$ et $(x^2 + 765)^2 > 0$ donc $f'(x)$ et $g'(x)$ sont de signes contraires sur $]0\,;\,50]$. f et g sont donc de variations contraires sur $]0\,;\,50]$.
On en déduit que l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum lorsque f est minimale sur $]0\,;\,50]$.
On étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,50]$ et on trouve que le minimum de f est atteint pour $x = \sqrt{765} \Leftrightarrow x = 28$ m au mètre près.
L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ a alors une mesure égale à $\arctan\left(\dfrac{5,6 \times 28}{28^2 + 765}\right) = 0,10$ rad à 0,01 rad près.
On pouvait éviter les calculs de dérivées en utilisant les propriétés des variations de la fonctions inverse et des fonctions linéaires