



Math93.com

Baccalauréat 2016 - S Métropole

Série S Obli. et Spé.
20 juin 2016
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter



Remarque : dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

Exercice 1. Probabilités

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

La chaîne A produit 40% des composants et la chaîne B produit le reste. Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5%. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. On note : A l'évènement « le composant provient de la chaîne A » ; B l'évènement « le composant provient de la chaîne B » ; S l'évènement « le composant est sans défaut ».

1. Montrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,89$.

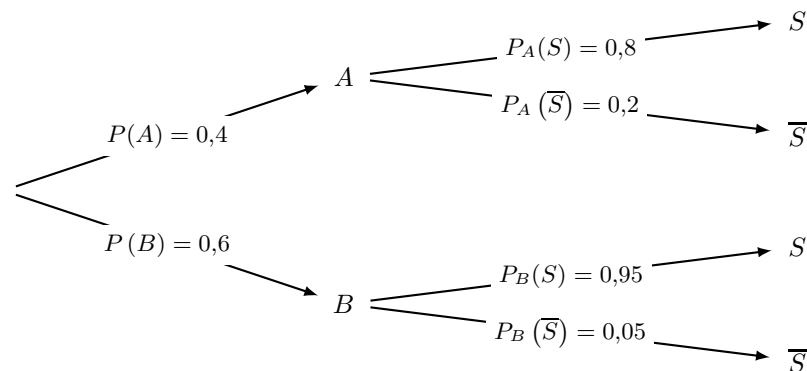
On va résumer les données dans un arbre :

- « La chaîne A produit 40% des composants et la chaîne B produit le reste » donc :

$$P(A) = 0,40 \text{ et } P(B) = 0,6$$

- « En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5% » donc :

$$P_A(\bar{S}) = 0,20 \text{ et } P_B(\bar{S}) = 0,05 \implies P_A(S) = 0,80 \text{ et } P_B(S) = 0,95$$



On cherche $P(S)$ or d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap B)$$

$$P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S)$$

$$P(S) = 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,95$$

$$P(S) = 0,32 + 0,57$$

Soit

$$\boxed{p(S) = 0,89}$$



2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

On cherche donc la probabilité $P_S(A)$ soit :

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A) \times p_A(S)}{P(S)} = \frac{0,4 \times 0,8}{0,89} \approx \underline{0,36}$$

Partie B

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A. Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de 0,92.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

« Sur un échantillon de $n = 400$ composants. Il est constaté que $f = 92\% = 0,92$ sont sans défaut.

Théorème 1 (Intervalle de confiance)

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p .

Si les conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & nf \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) \geq 5 \end{cases}$$

Alors un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 400$, $f = 0,92$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 400 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 400 \times \frac{368}{400} = 368 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 400 \times \frac{32}{400} = 32 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{368}{400} - \frac{1}{\sqrt{400}} ; \frac{368}{400} + \frac{1}{\sqrt{400}} \right]$$

Soit puisque les bornes sont :

- $\frac{368}{400} - \frac{1}{\sqrt{400}} \approx 0,87$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit 0,87.
- $\frac{368}{400} + \frac{1}{\sqrt{400}} \approx 0,97$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit 0,97.

$$I_{400} \approx [0,87 ; 0,97]$$

2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle ait une amplitude max. de 0,02 ?

Un intervalle de confiance est de la forme $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ donc son amplitude est $A = \frac{2}{\sqrt{n}}$. On cherche alors n pour que $A \leq 0,02$ soit :

$$A \leq 0,02 \iff \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,02$$

On compose alors par la fonction inverse, strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* puis par la fonction carrée strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* soit :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,02 \iff \frac{\sqrt{n}}{2} \geq \frac{1}{0,02} \iff n \geq \frac{2^2}{0,02} = 10\,000$$

La taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle ait une amplitude max. de 0,02 est donc de 10 000.

**Partie C**

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif). On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T .

1. La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f est donnée ci-dessous.**1. a. Interpréter graphiquement $P(T \leq a)$ où $a > 0$.**

On a pour tout a réel strictement positif :

$$P(T \leq a) = \int_0^a f(x) dx$$

Donc pour tout a réel strictement positif, $P(T \leq a)$ correspond donc à l'aire comprise entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

1. b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geq 0$: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Pour tout t réel positif,

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= \int_0^t f(x) dx \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \end{aligned}$$

Or une primitive de $x \mapsto e^{-\lambda x}$ est $x \mapsto \frac{1}{-\lambda} \times e^{-\lambda x}$ donc :

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= \left[\lambda \times \frac{1}{-\lambda} \times e^{-\lambda x} \right]_0^t \\ P(T \leq t) &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^t \\ P(T \leq t) &= -e^{-\lambda \times t} + e^{-\lambda \times 0} \end{aligned}$$

Pour tout t strictement positif,

$$\boxed{P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}}$$

1. c. En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(T \leq t) = 1$.

Puisque λ est un réel strictement positif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} -\lambda t = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \implies \\ \text{Par composition} \end{array} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} = 0$$

Et de ce fait :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\lambda t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(T \leq t) = 1}$$

2. On suppose que $P(T \leq 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

On a montré lors de la question (C.1.b) que pour tout t réel positif,

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

De ce fait :

$$\begin{aligned} P(T \leq 7) = 0,5 &\iff 1 - e^{-7\lambda} = 0,5 \\ &\iff e^{-7\lambda} = 0,5 \end{aligned}$$

On compose alors par la fonction \ln définie sur \mathbb{R}_+^* :

$$\begin{aligned} P(T \leq 7) = 0,5 &\iff -7\lambda = \ln 0,5 = -\ln 2 \\ &\iff \lambda = \frac{\ln 2}{7} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{7} \approx 0,099}$$



3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

3. a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

On a d'après la question (C.1.b) avec $\lambda = 0,099$:

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-0,099t} \iff P(T > t) = e^{-0,099t}$$

On cherche à calculer $P(T \geq 5)$, donc arrondi au centième on obtient :

$$P(T \geq 5) = e^{-0,099 \times 5} \approx 0,61$$

3. b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans. Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

Propriété 1 (Durée de vie sans vieillissement)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h :

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

Cette propriété traduit le fait que la loi exponentielle est « sans mémoire ».

La probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans sachant qu'il fonctionne encore au bout de 2 ans est $P_{T \geq 2}(T \geq 7)$. On applique alors la propriété 1 qui traduit le fait que la loi exponentielle est « sans mémoire » :

$$P_{T \geq 2}(T \geq 7) = P_{T \geq 2}(T \geq 5 + 2) = P(T \geq 5)$$

Et donc en appliquant le résultat de la question (C.3.a) on a arrondi au centième :

$$P_{T \geq 2}(T \geq 7) = P(T \geq 5) \approx 0,61$$

3. c. Donner l'espérance mathématique $E(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près. Interpréter ce résultat.

L'espérance mathématique $E(T)$ de la variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,099} \approx \underline{10}$$

Cela signifie que la durée de vie moyenne d'un tel composant électronique est de 10 ans.

**Exercice 2. Géométrie dans l'espace****4 points****Commun à tous les candidats**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points :

$$A(1; 2; 3) ; B(3; 0; 1) ; C(-1; 0; 1) ; D(2; 1; -1) ; E(-1; -2; 3) \text{ et } F(-2; -3; 4)$$

Affirmation 1 (Fausse)

Les trois points A, B et C sont alignés.

Preuve

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1; 2; 3) \\ B(3; 0; 1) \\ C(-1; 0; 1) \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires puisque

$$\frac{-2}{2} \neq \frac{-2}{2}$$

De ce fait les points A, B et C ne sont pas alignés. L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 (Vraie)

Le vecteur $\vec{n}(0; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

Preuve

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{array} \right.$$

Le vecteur $\vec{n}(0; 1; -1)$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) , c'est donc un vecteur normal au plan (ABC) . L'affirmation 2 est vraie.

**Affirmation 3 (Vraie)**

La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu M du segment [BC].

Preuve

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a $B(3; 0; 1)$; $C(-1; 0; 1)$ donc :

$$M = \text{mil } [BC] \implies M(1; 0; 1)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} E(-1; -2; 3) \\ F(-2; -3; 4) \\ M(1; 0; 1) \end{array} \right. \implies \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- D'une part on a :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - 1 - 1 = -2 \neq 0$$

Donc les vecteurs \vec{n} et \overrightarrow{EF} ne sont pas orthogonaux. Le vecteur \vec{n} étant normal au plan (ABC) d'après la question 2, cela implique que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants.

- D'autre part, puisque

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{EM} = -2\overrightarrow{EF}$$

Le point M appartient donc à la droite (EF).

- Or le point M est le milieu du segment [BC], il appartient donc aussi au plan (ABC), donc à l'intersection des deux.

La droite (EF) et le plan (ABC) sont donc sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

L'affirmation 3 est vraie.

**Affirmation 4** (Fausse)

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Preuve

On va pour cela déterminer les équations des deux droites puis résoudre un système. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{cases} A(1; 2; 3) \\ B(3; 0; 1) \\ C(-1; 0; 1) \\ D(2; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La droite (AB) passant par le point A et de vecteur directeur \overrightarrow{AB} est l'ensemble des points N de l'espace tels que le vecteur \overrightarrow{AN} soit colinéaire à \overrightarrow{AB} . On a alors :

$$(AB) = \left\{ N(x; y; z); \overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = t \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc :

$$(AB) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

La droite (CD) passant par le point C et de vecteur directeur \overrightarrow{CD} est l'ensemble des points N de l'espace tels que le vecteur \overrightarrow{CN} soit colinéaire à \overrightarrow{CD} . On a alors :

$$(CD) = \left\{ N(x; y; z); \overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = t' \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t' \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite (CD) est donc :

$$(CD) : \begin{cases} x = 3t' - 1 \\ y = t' \\ z = -2t' + 1 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

Pour trouver l'intersection éventuelle de ces droites on cherche alors à résoudre le système :

$$\begin{cases} 3t' - 1 = 2t + 1 \\ t' = -2t + 2 \\ -2t' + 1 = -2t + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2t + 2 \\ 3(-2t + 2) - 1 = 2t + 1 \\ -2(-2t + 2) + 1 = -2t + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2t + 2 \\ -6t + 5 = 2t + 1 \\ 4t - 3 = -2t + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2t + 2 \\ 8t = 4 \\ 6t = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2t + 2 \\ t = 0,5 \\ t = 1 \end{cases}$$

Le système n'admet donc pas de solution.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes. L'affirmation 4 est fausse.

**Exercice 3. Obligatoire - Fonction et suite****points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie ASoit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x - \ln(x^2 + 1) = x \\ &\iff \ln(x^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

On compose alors par la fonction exponentielle, définie sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 + 1 = 1 \\ &\iff x^2 = 0 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{f(x) = x \iff x = 0}$$

L'unique solution de l'équation $f(x) = x$ est $x = 0$.2. Justifier tous les éléments du tableau de variations à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$			$+\infty$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x - \ln(x^2 + 1) \end{cases}$$

- Pour tout réel x ,

$$x^2 + 1 \geq 1 > 0$$

La fonction f est donc définie et dérivable sur \mathbb{R} comme somme et composée de fonctions qui le sont. Pour u fonction strictement positive et dérivable, la dérivée de $\ln u$ est $\frac{u'}{u}$ donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$$

On a donc après factorisation élémentaire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \geq 0}$$

- La dérivée de f est donc positive sur \mathbb{R} et nulle en $x = 1$. la fonction f est donc croissante sur cet intervalle.
- Limite en $-\infty$.**

On a facilement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \implies \\ \text{Composition} \end{array} \right. \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(x^2 + 1) = -\infty$$

On a donc par somme de limites :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \ln(x^2 + 1) = -\infty}$$



3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0 ; 1]$.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x - \ln(x^2 + 1) \end{cases}$$

Et :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1 - \ln 2 \approx 0,31$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f	$-\infty$	0	$1 - \ln 2$	$+\infty$

D'après l'étude menée lors de la question (A.2.), f est croissante sur \mathbb{R} donc à fortiori sur l'intervalle $[0 ; 1]$. De ce fait :

$$\forall x \in [0 ; 1] ; f(0) = 0 \leq f(x) \leq f(1) \approx 0,31 < 1$$

Donc pour tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0 ; 1]$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln(N^2 + 1) < A$ N prend la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

4. a. Que fait cet algorithme ?

Cet algorithme fournit le premier entier naturel N à partir duquel, pour un A donné, on a $f(N) \geq A$.

4. b. Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

La calculatrice donne aisément avec la fonction table :

N	109	110
$f(N)$	$f(109) \approx 99,62$	$f(110) \approx 100,60$

La valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100 est donc $N = 110$.

**Partie B**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0 ; 1]$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n) : u_n \in [0 ; 1]$$

- **Initialisation**

Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$u_0 = 1 \in [0 ; 1]$$

- **Hérédité**

Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n + 1$.
Par définition de la suite (u_n) et d'après l'expression de la fonction f de la partie (A.) on a :

$$u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1) = f(u_n)$$

D'après l'hypothèse de récurrence $u_n \in [0 ; 1]$.

Or d'après la question (A.3.), pour tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0 ; 1]$. De ce fait :

$$u_n \in [0 ; 1] \implies f(u_n) = u_{n+1} \in [0 ; 1]$$

On a alors montré que $u_{n+1} \in [0 ; 1]$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**

On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{u_n \in [0 ; 1]}$$

2. Étudier les variations de la suite (u_n) .

Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n - \ln(u_n^2 + 1) - u_n \\ &= -\ln(u_n^2 + 1) \end{aligned}$$

Or pour tout entier n on a

$$u_n^2 \geq 0 \implies (u_n^2 + 1) \geq 1$$

Et en composant par la fonction \ln strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* on obtient :

$$\ln(u_n^2 + 1) \geq \ln 1 = 0 \implies -\ln(u_n^2 + 1) \leq 0$$

On vient donc de montrer que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

la suite (u_n) est donc décroissante.

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question (B.1.) la suite (u_n) est minorée par 0 et décroissante d'après la question (B.2.). Elle est donc convergente vers une limite ℓ .

4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ .

On admet que ℓ vérifie l'égalité

$$f(\ell) = \ell$$

Or d'après la question (A.1.), l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ est $x = 0$. On a donc $\ell = 0$.

**Exercice 3. Spécialité - Arithmétique****5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$.1. a. Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.Si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors :

$$15x - 12y = 3 \times \underbrace{(5x - 4y)}_{N \in \mathbb{Z}}$$

Donc si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3, on peut l'écrire $15x - 12y = 3N$, avec $N \in \mathbb{Z}$.1. b. Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.Un point $M(x, y)$ appartient à Δ_1 si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$ soit :

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \Delta_1 &\iff y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3} \\ &\iff 12y = 12 \times \left(\frac{5}{4}x - \frac{2}{3} \right) \\ &\iff 12y = 15x - 8 \\ M(x, y) \in \Delta_1 &\iff 8 = 15x - 12y \end{aligned}$$

Or d'après la question (1.), si on suppose que (x_0, y_0) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x_0 - 12y_0$ est divisible par 3 et peut s'écrire $15x_0 - 12y_0 = 3N$, avec $N \in \mathbb{Z}$.Donc si le point $M_0(x_0, y_0)$ appartenait à la droite Δ_1 , on aurait l'égalité :

$$M_0(x_0, y_0) \in \Delta_1 \iff 8 = 15x_0 - 12y_0 = 3N, \quad N \in \mathbb{Z}$$

Or 3 divise évidemment le produit $3N$ mais pas 8, l'égalité est donc impossible. Il n'existe aucun point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.**Généralisation**On considère désormais une droite Δ d'équation (E) : $y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(m, n) = \text{pgcd}(p, q) = 1$.2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.2. a. En remarquant que le nombre $ny_0 - mx_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np .

- Si on suppose que (x_0, y_0) est un couple d'entiers relatifs, alors pour n et m relatifs, le couple (mx_0, ny_0) est aussi un couple de relatifs. De ce fait, $(ny_0 - mx_0)$ est une différence de deux relatifs, donc un relatif .
On peut donc écrire $ny_0 - mx_0 = N_0 \in \mathbb{Z}$.
- Le point de coordonnées (x_0, y_0) est par ailleurs un point de la droite Δ , donc ses coordonnées vérifient l'équation de Δ soit :

$$M(x_0, y_0) \in \Delta \iff y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$$

En multipliant les deux membres par n , entier relatif non nul on obtient :

$$\begin{aligned} M(x_0, y_0) \in \Delta &\iff ny_0 = mx_0 - \frac{np}{q} \\ &\iff \underbrace{ny_0 - mx_0}_{N_0 \in \mathbb{Z}} = -\frac{np}{q} \\ &\iff N_0 = -\frac{np}{q} \end{aligned}$$

De ce fait le quotient $\left(-\frac{np}{q}\right)$ est un entier relatif ce qui implique que q divise le produit np .

**2. b. En déduire que q divise n .****Théorème 2** (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)

Soit a, b, c des entiers.

Si $\begin{cases} a \text{ divise le produit } bc \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{cases}$, alors a divise c .



Remarque : Le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss énonce et prouve ce théorème (sous forme de lemme en fait) en 1801 dans son ouvrage « *Disquisitiones arithmeticae* ».

D'après les données, les entiers p et q sont premiers entre eux et on vient de montrer lors de la question (2.a.) que q divise le produit np , d'après le théorème 2 de Gauss, q divise n .

$$\left\{ \begin{array}{l} p \text{ et } q \text{ sont premiers entre eux} \\ q \text{ divise le produit } np \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Th. de Gauss}} q \text{ divise } n$$

Remarque : on vient de prouver que si Δ d'équation (E) : $y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(m, n) = \text{pgcd}(p, q) = 1$, comporte un point de coordonnées entières (x_0, y_0) alors q divise n .

Et donc par contraposée, si q ne divise pas n , un tel point n'existe pas.

Or dans l'exemple proposé dans la question (1.), $q = 3$ ne divise pas $n = 4$, on retrouve le résultat alors démontré.

3. Réciproquement, on suppose que q divise n , et on souhaite trouver $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.**3. a. On pose $n = qr$, où $r \in \mathbb{Z}^*$. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru - mv = 1$.****Théorème 3** (Bézout, 1730-1883)

Deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Soit :

$$\text{PGCD}(a; b) = 1 \iff \exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2; au + bv = 1$$



Remarque : C'est le groupe Bourbaki qui donne vers 1948 le nom de Bézout à ce théorème qui en fait est énoncé et démontré par le mathématicien français Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) dans ses « *Problèmes plaisans et délectables* » publié en 1624. Bézout démontre lui une généralisation de ce théorème aux polynômes en 1764 dans un mémoire présenté à l'académie des sciences.

Puisque d'après les données, n et m sont premiers entre eux, d'après le théorème 3 dit de Bézout-Bachet, il existe deux entiers relatifs u et v' tels que :

$$n \times u + m \times v' = 1$$

Ce qui peut aussi s'écrire en posant $n = qr$ et $v = -v'$:

$$qr \times u - m \times v = 1$$

On vient donc de prouver que l'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru - mv = 1$.



3. b. En déduire qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

On cherche un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$ soit en multipliant cette égalité par l'entier n non nul :

$$y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q} \iff n \times y_0 = mx_0 - \frac{n \times p}{q}$$

On a posé $n = qr$ où $r \in \mathbb{Z}^*$ soit :

$$\begin{aligned} y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q} &\iff qry_0 = mx_0 - \frac{qrp}{q} \\ &\iff qry_0 = mx_0 - rp \\ &\iff qr \times y_0 - m \times x_0 = -rp \end{aligned}$$

Or, lors de la question (3.a.) on a prouvé que l'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru - mv = 1$. On peut alors multiplier cette égalité par le relatif non nul $(-rp)$:

$$qru - mv = 1 \iff qr \times (-urp) - m \times (-vrp) = -rp$$

Et donc par identification :

$$\left\{ \begin{array}{l} qr \times y_0 - m \times x_0 = -rp \\ qr \times (-urp) - m \times (vrp) = -rp \end{array} \right. \Bigg|_{\text{Identification}} \implies \boxed{y_0 = -urp \text{ et } x_0 = -vrp}$$

Il existe un couple $(x_0 = -vrp, y_0 = -urp)$ d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

4. Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{3}{8}x - \frac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.

- La droite Δ est d'équation $y = \frac{3}{8}x - \frac{7}{4}$ de la forme (E) : $y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}$ avec $\begin{cases} m = 3 \\ n = 8 \\ p = 7 \\ q = 4 \end{cases}$ et tels que $\text{pgcd}(m, n) = \text{pgcd}(p, q) = 1$.

- Puisque $q = 4$ divise $n = 8$, on pose alors $n = qr = 4 \times 2$ avec $\begin{cases} n = 8 \\ q = 4 \\ r = 2 \end{cases}$ et d'après la question (3.b.), il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{3}{8}x_0 - \frac{7}{4}$.
- Cette droite possède bien un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

**5. On donne l'algorithme suivant :**

Un erreur figurait dans le sujet, les élèves ont été prévenus 2 h après le début de l'épreuve. Il fallait remplacer $+\frac{P}{Q}$ par $-\frac{P}{Q}$ dans l'algorithme. L'algorithme ci-dessous tient compte de ce rectificatif et est donc correct.

Variables :	M, N, P, Q : entiers relatifs non nuls, tels que $\text{pgcd}(M, N) = \text{pgcd}(P, Q) = 1$ X : entier naturel
Entrées :	Saisir les valeurs de M, N, P, Q
Traitement et sorties :	<pre> Si Q divise N alors X prend la valeur 0 Tant que $\left(\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}\right)$ n'est pas entier et $\left(-\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}\right)$ n'est pas entier faire X prend la valeur $X + 1$ Fin tant que Si $\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$ est entier alors Afficher $X, \frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$ Sinon Afficher $-X, -\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$ Fin Si Sinon Afficher « Pas de solution » Fin Si </pre>

5. a. Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de M, N, P, Q , entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(M, N) = \text{pgcd}(P, Q) = 1$.

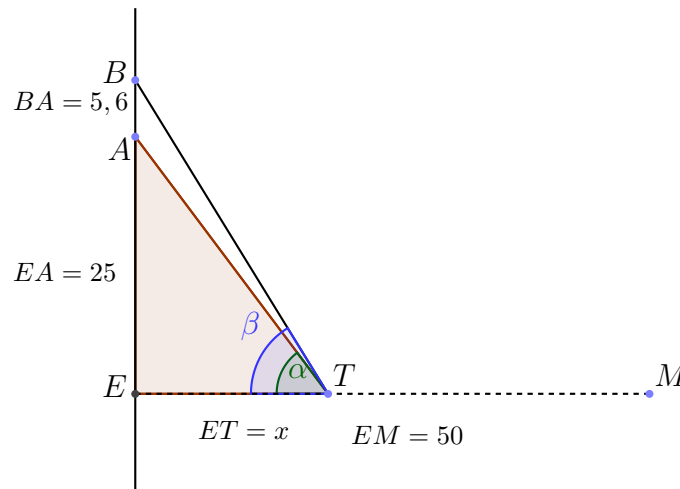
- On a prouvé lors de la question (3.) que si q divise n , on peut trouver un point de la droite Δ dont les coordonnées sont des entiers relatifs. En outre, lors de la question (2.), par contraposé, si q ne divise pas n , on a prouvé qu'un tel point n'existe pas.
- Dans l'algorithme, si Q ne divise pas N , il affiche « pas de solution », ce qui est conforme à l'étude.
- Par contre si Q divise N , l'algorithme calcul les images, pour X entier naturel, de X et de $-X$ par $X \mapsto \frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$. On reconnaît bien sûr l'équation de la droite Δ . Ce calcul s'effectue tant qu'une des deux images calculées n'est pas entière.
- L'algorithme se termine donc car on sait que sous les conditions imposées, la droite Δ possède au moins un point à coordonnées entières d'après la question (3.).

5. b. Que permet-il d'obtenir ?

Dans le cas où Q divise N , l'algorithme va alors afficher les coordonnées d'un point de Δ qui sont entières. Sinon il affiche qu'il n'y a pas de solution.

**Exercice 4. Fonctions et trigonométrie****5 points**

Commun à tous les candidats



1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB , exprimer $\tan \alpha$ et $\tan \beta$ en fonction de x .

Notons que le point T appartient au segment $[EM]$, en étant distinct du point E , donc le $ET = x \in]0; 50[$.

Dans le triangle ETA rectangle en E on a :

$$\tan \widehat{ETA} = \tan \alpha = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x} \implies \boxed{\tan \alpha = \frac{25}{x}}$$

Dans le triangle ETB rectangle en E on a :

$$\tan \widehat{ETB} = \tan \beta = \frac{EB}{ET} = \frac{25 + 5,6}{x} \implies \boxed{\tan \beta = \frac{30,6}{x}}$$

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction \tan est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

La fonction \tan est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.

La fonction \tan est de la forme $\frac{u}{v}$ donc de dérivée $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[; \tan(x) = \frac{u(x)}{v(x)} : \begin{cases} u(x) = \sin x & ; & u'(x) = \cos x \\ v(x) = \cos x & ; & v'(x) = (-\sin x) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \tan'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2} \\ \tan'(x) &= \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ \tan'(x) &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Or pour tout réel x de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$, le dénominateur $\cos^2 x$ est strictement positif. La dérivée de la fonction \tan est donc strictement croissante sur cet intervalle et la fonction \tan est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.



3. L'angle \widehat{ATB} admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure. On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.

Montrer que $\tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$.

D'après la relation de Chasles sur les angles on a :

$$\widehat{ATB} = \widehat{ETB} - \widehat{ETA} \implies \gamma = \beta - \alpha$$

De ce fait, les angles β et α appartenant à l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a en appliquant la formule admise :

$$\tan \gamma = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \times \tan \alpha}$$

On applique alors les résultats obtenus lors de la question (1.) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \gamma = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \times \tan \alpha} \\ \tan \alpha = \frac{25}{x} \\ \tan \beta = \frac{30,6}{x} \end{array} \right. \implies \tan \gamma = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x} \times \frac{25}{x}}$$

Soit :

$$\tan \gamma = \frac{30,6x - 25x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{765}{x^2}}$$

Soit

$$\boxed{\tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}}$$

4. L'angle \widehat{ATB} est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0; 50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle \widehat{ATB} est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle \widehat{ATB} à 0,01 radian près.

- La fonction \tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ donc l'angle γ est maximal quand sa tangente l'est, c'est à dire quand la fonction $x \mapsto \tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$ est maximale.
- Notons que pour x de l'intervalle $]0; 50]$:

$$x \mapsto \tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765} = 5,6 \times \frac{x}{x^2 + 765} = 5,6 \times \frac{1}{x + \frac{765}{x}}$$

- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 50]$ par : $f(x) = x + \frac{765}{x}$, de sorte que

$$x \mapsto \tan \gamma = 5,6 \times \frac{1}{f(x)}$$

La fonction f est dérivable sur cet intervalle et on a directement :

$$f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2 - 765}{x^2}$$

Le dénominateur étant strictement positif, la dérivée est du signe de $(x^2 - 765)$. Ce numérateur est un polynôme du second degré, qui est négatif (signe de $-a$) à l'intérieur des deux racines réelles $\sqrt{765} \approx 27,7$ et $-\sqrt{765}$, et positif ailleurs. On a alors :



x	0	$\sqrt{765}$	50	
$f'(x)$		-	0	+
f				

Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 50]$ est donc atteint en $\sqrt{765} \approx 27,659$ et vaut

$$f(\sqrt{765}) \approx 55,317$$

- Or pour $x \in]0 ; 50]$ on a

$$x \mapsto \tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765} = 5,6 \times \frac{1}{f(x)}$$

Par composition par la fonction inverse, strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* , le minimum de f correspond au maximum de $\tan \gamma$.

Or la fonction \tan est strictement croissante sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$, le maximum de $\tan \gamma$ correspond donc aussi au maximum de γ .

Il existe donc une unique valeur de x pour laquelle l'angle \widehat{ATB} est maximum et cette valeur de x est, au mètre près

$$x = \sqrt{765} \approx 28 \text{ m}$$

On a alors :

$$\tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765} = \frac{5,6\sqrt{765}}{765 + 765} \approx 0,101$$

Ainsi une mesure de l'angle \widehat{ATB} à 0,01 radian près :

$$\gamma = \arctan \frac{5,6\sqrt{765}}{765 + 765} \approx 0,10 \text{ rad}$$

