Math93.com

Baccalauréat 2017 - S Liban

Série S Obli. et Spé.
5 Juin 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Espace — 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

Théorème 1

$\overrightarrow{n}$ est normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas colinéaires et engendrent donc (EBG). Dans le repère $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\right)$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} E\,(1\,;\,0\,;\,1) \\ B\,(1\,;\,1\,;\,0) \\ G\,(0\,;\,1\,;\,1) \\ D\,(0\,;\,0\,;\,0) \\ F\,(1\,;\,1\,;\,1) \end{array}\right| \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0+1-1=0 \\ \\ \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -1+1+0=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{EB}=0 \\ \overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{EG}=0 \end{array}\right.$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG) car il est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$ non colinéaires de ce plan.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

Propriété 1

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{u}=0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}.\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \Longleftrightarrow a\,(x-x_A)+b\left(y-y_A\right)+c\,(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 1 :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(EBG) \Longleftrightarrow \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-1\end{pmatrix}.\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{aligned} M(x\,;\,y\,;\,z)\in(EBG) &\Longleftrightarrow (x-1)+(y-0)+(z-1)=0 \\ &\Longleftrightarrow \underline{(EBG)\ :\ x+y+z-2=0} \end{aligned}$$

3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).

On démontrerait de même que les coordonnées du point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) sont $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

- Équation de la droite (DF).
  La droite (DF) passant par le point $D(0;0;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DF}$ $(1;1;1)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{DM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{DF}$. On a alors :

$$(DF) = \left\{ M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ ;\ \overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = t\,\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

  Une représentation paramétrique de la droite (DF) est donc :

$$\boxed{(DF)\ :\ \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}\ ,\ t \in \mathbb{R}}$$

- Les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG) vérifient donc le système :

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

  Soit :

$$t + t + t - 2 = 0 \iff t = \frac{2}{3} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} x_I = \dfrac{2}{3} \\ y_I = \dfrac{2}{3} \\ z_I = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

  Les coordonnées du point I intersection du plan (EBG) avec la droite (DF) sont donc $\boxed{I\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)}$.

Partie B

Á tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que : $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$. On s'intéresse à la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ quand M parcourt le segment $[DF]$. On a : $0 \leq \theta \leq \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?

- Si le point M est confondu avec le point D alors le triangle EMB est équilatéral. En effet les côtés de ce triangle sont tous des diagonales de carrés de côté 1, donc de mesure $\sqrt{2}$.
  La mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ est donc de $\frac{\pi}{3}$.
- Si le point M est confondu avec le point F alors le triangle EMB est rectangle et isocèle en F.
  La mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ est donc de $\frac{\pi}{2}$.

2.

2. a. Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\ ;\ x\ ;\ x)$.

Á tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que : $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$, de ce fait :

$$\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF} \iff \begin{cases} x - 0 = x \times 1 \\ y - 0 = x \times 1 \\ z - 0 = x \times 1 \end{cases}$$

Les coordonnées du point M sont donc : $M(x\ ;\ x\ ;\ x)$, avec x réel de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

2. b. Montrer que : $\cos\theta = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$.

- D'une part on a :

$$\left\{\begin{array}{l} M\,(x\,;\,x\,;\,x) \\ B\,(1\,;\,1\,;\,0) \\ E\,(1\,;\,0\,;\,1) \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{ME}\begin{pmatrix}1-x\\-x\\1-x\end{pmatrix}.\ \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}1-x\\1-x\\-x\end{pmatrix} = (1-x)^2 - 2x(1-x)\ .\iff \overrightarrow{ME}\ .\ \overrightarrow{MB} = 3x^2-4x+1$$

- D'autre part :

$$ME = MB = \left\|\overrightarrow{ME}\right\| = \sqrt{2(1-x)^2+x^2}$$

Donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ME}\ .\ \overrightarrow{MB} &= ME \times MB \times \cos\widehat{EMB} \\ &= ME^2 \times \cos\widehat{EMB} \\ &= ME \times MB \times \cos \qquad\qquad = \left(2(1-x)^2+x^2\right)\times\cos\widehat{EMB} \\ \overrightarrow{ME}\ .\ \overrightarrow{MB} &= \left(3x^2-4x+2\right)\times\cos\widehat{EMB} \end{aligned}$$

- Donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{ME}\ .\ \overrightarrow{MB} = \left(3x^2-4x+2\right)\times\cos\theta \\ \overrightarrow{ME}\ .\ \overrightarrow{MB} = 3x^2-4x+1 \end{cases} \iff \underline{\left(3x^2-4x+2\right)\times\cos\theta = 3x^2-4x+1}$$

L'expression $\left(3x^2 - 4x + 2\right)$ est une expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=3 \\ b=-4 \\ c=2 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = -8 < 0$$

Le discriminant Δ étant strictement négatif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(3x^2 - 4x + 2\right)$ n'admet pas de racine réelle. De ce fait on peut diviser les deux membres de l'égalité précédente par $\left(3x^2-4x+2\right)$ et l'on obtient :

$$\boxed{\cos\theta = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}}$$

3. *On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction* $f : x \longrightarrow \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$.

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Variations de f	$\frac{1}{2}$ ↘	0 ↘	$-\frac{1}{2}$ ↗	0

On rappelle que les coordonnées du point I *intersection de la droite* (DF) *et du plan* (EBG) *sont* $I\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$ *et que celles du point* J *intersection de la droite* (DF) *et du plan* (AHC) *sont* $J\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:

3. a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?

Le triangle MEB est rectangle en M si, et seulement si, $\cos(\theta) = 0$.

Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- **Application du corollaire sur $\left[0; \frac{2}{3}\right]$:**
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $\left[0; \frac{2}{3}\right]$;
  - Le réel $k = 0$ est compris entre $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left[0; \frac{2}{3}\right]$.
  - D'après le tableau de variation on a $\alpha = \frac{1}{3}$.
- **Sur $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$.**
  Sur cet intervalle la fonction f est continue, croissante et atteint son maximum 0 pour $x = 1$. de ca fait l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle, qui est $x = 1$.
- **Conclusion.**
  Le triangle MEB est rectangle en M si, et seulement si, $\cos(\theta) = 0$ et donc si et seulement si $x = \frac{1}{3}$ ou $x = 1$ soit quand M est de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$ ou $(1\,;\,1\,;\,1)$.
  Les seules positions du point M sur le segment [DF] pour lesquelles le triangle MEB est rectangle en M sont donc lorsque M est confondu avec le point $J\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$ ou confondu avec le point $F(1\,;\,1\,;\,1)$.

3. b. l'angle θ est-il maximal ?

La fonction cos est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$. De ce fait l'angle θ est maximal quand $\cos\theta$ est minimal.
D'après le tableau de variation proposé, la fonction f atteint son minimum pour $x = \frac{2}{3}$.

L'angle θ est maximal quand M est confondu avec le point $I\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 2. Probabilités — 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Partie A

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. le tableau suivant présente les observations faites sur une journée.

Durée d'attente en minute	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	**Total**
Centres des classes	1	3	5	7	X
Nombre de voiture	75	19	10	5	**109**

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.

En utilisant le centre des classes on peut calculer une estimation de la moyenne des temps d'attente :

$$\overline{m} = \frac{1\times 75+3\times 19+5\times 10+7\times 5}{75+19+10+5} = \frac{217}{109} \approx \underline{1{,}99\,\text{min}}$$

Une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking est d'environ 2 min .

2. On modélise cette durée par une variable T suivant la loi exponentielle de paramètre λ (exprimé en minute).

2. a. Justifier que l'on peut choisir $\lambda = 0{,}5$ min.

Définition 1

Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire à densité T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

En outre la variable T est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

On choisissant $\lambda = 0{,}5$ min, on onbtent une loi exponentielle de moyenne :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}5} = 2$$

Ce résultat est cohérent avec la moyenne estimée lors de la question (1.).

2. b. Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?

Propriété 2

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leq a \leq b$:

$$P(a \leq T \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P(T \leq b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geq a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

En outre la variable T est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

On cherche donc $P(X < 2)$ soit :

$$P(X<2) = P(0 \leq X < 2) = \mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{2}} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx \underline{0{,}6321}$$

La probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière est d'environ 0,63 21.

2. c. Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ?

On cherche donc $P_{T\geqslant 1}(T \leq 1+1)$ soit :

$$\begin{aligned}
P_{T\geqslant 1}(T \leq 2) &= \frac{P\left((T \geqslant 1)\cap(T \leq 2)\right)}{P(T \geqslant 1)}\\
&= \frac{P(1 \leq T \leq 2)}{P(T \geqslant 1)}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-0,5\times 1}-\mathrm{e}^{-0,5\times 2}}{\mathrm{e}^{-0,5\times 1}}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-0,5}-\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^{-0,5}}\\
P_{T\geqslant 1}(T \leq 2) &\approx \underline{0,393\ 5}
\end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi utiliser la durée de vie sans vieillissement en se ramenant à la probabilité que $P_{T\geq 1}(T \geq 2)$.

Partie B

Une fois garée, la durée de stationnement est modélisée par une va D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 70$ min et d'écart-type $\sigma = 30$ min.

1.

1. a. Quelle est la durée moyenne de stationnement d'une voiture ?

Puisque la variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 70$ min, la durée moyenne de stationnement d'une voiture est de 70 minutes.

1. b. Un automobiliste entre et se gare. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures ?

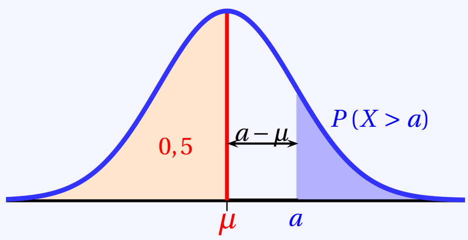
Propriété 3 ($P(X > a)$; $a > \mu$)

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0,5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$\boxed{P(X > a) = 0,5 - P\left(\mu < X < a\right)}$$



La probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures soit 120 minutes est $P(D > 120)$ et puisque $120 > \mu = 70$:

$$P(D > 120) = 0,5 - P(70 < D < 120) \approx \underline{0.0478}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 :* $\left(0,5-\ \textit{TIStat.normFDR}(70\ ,\ 120\ ,\ 70\ ,\ 30)\right) \approx \underline{0,047790}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*(70 , 120 , 70 , 30) *ou (fr.) normalfrép*(70 , 120 , 70 , 30)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd ⇒ NormCD*(70 , 120, 30 , 70)

1. c. Á la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures ?

Le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures est le temps t tel que $P(T < t) = 0,99$.

On cherche t tel que $P(X \leq t) = 0,99$ où X qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(70\,;\,30^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-0} près :

$$\boxed{P(X \leq t) = 0,99 \iff t \approx \underline{140}}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*(0.99 , 70 , 30) ≈ $\underline{139,79}$
- *Sur TI82/83+ : invNorm*(0.99 , 70 , 30) *ou (fr.) FracNormale*(0.99 , 70 , 30)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN ⇒ InvNormCD*(0.99 , 30 , 70)

Á la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures est de 140 min soit 2 heures et 20 minutes.

2. *La durée de stationnement est limitée à 3 heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due.*

Durée de stationnement	inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	t

Déterminer le tarif t de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.
On va calculer les probabilités que la durée de stationnement soit inférieure à 15 min, puis celle qu'elle soit comprise entre 15 et 60 min, puis celle quelle soit entre 60 et 120 puis entre 120 et 180.

Durée	inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	1 ère Heure supplémentaire	2e heure supp
Tarif	Gratuit	3,5	t	t
Probabilité	$P(D<15)\approx 0.0334$	$P(15<D<60)\approx 0.3361$	$P(60<D<120)\approx 0.5828$	$P(120<D<180)\approx 0.0477$
Coût	0	3,5 euros	$3,5+t$	$3,5+2t$

Remarque : pour calculer la probabilité que la durée soit inférieure à 15 min on applique la propriété suivante :

$$P(D<15)=0,5-P(15<D<70)\approx 0.0334$$

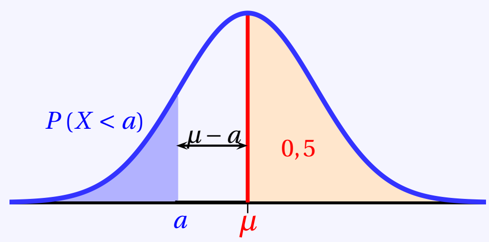
Propriété 4 ($P(X<a)$; $a<\mu$)

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X<\mu\right)=0,5=P\left(X>\mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a<\mu$:

$$\boxed{P(X<a)=0,5-P\left(a<X<\mu\right)}$$



On cherche donc t tel que :

$$\begin{aligned} E(D)=5 &\iff 0,336\,1\times 3,5+0,582\,8\times(3,5+t)+0,047\,7\times(3,5+2t)=5\\ &\iff 1,176\,35+2,0398+0,582\,8t+0.1668+0.0953t=5\\ &\iff t=\frac{16169}{6782}\approx 2,3841\end{aligned}$$

Donc le tarif t de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros est d'environ $t\approx 2,38$ euros.

Partie C

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre ville est modélisé par une variable aléatoire T' qui suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'. On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75% des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.

Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95% des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif est-il atteint ?

- **Analysons les données** :
  - T' suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.
  - On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes donc $\underline{\mu' = 30 \text{ min}}$.
  - On sait que 75% des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes donc $P(T' \leq 37) = 0,75$.
- **Déterminons σ'.**

Propriété 5

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire T' suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma'^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Z = \dfrac{T'-\mu}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Donc ici, puisque T' suit la loi normale $\mathcal{N}\left(30\,;\,\sigma'^2\right)$, la v.a. $Z = \dfrac{T'-30}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
On cherche ici une valeur approchée à 10^{-4} de σ' sachant que $P\left(T' \leqslant 37\right) = 0,75$, or :

$$\begin{aligned} P\left(T' \leqslant 37\right) = 0,75 &\iff P\left(\frac{T'-30}{\sigma'} \leqslant \frac{37-30}{\sigma'}\right) = 0,75 \\ &\iff P\left(Z \leqslant \frac{7}{\sigma'}\right) = 0,75 \end{aligned}$$

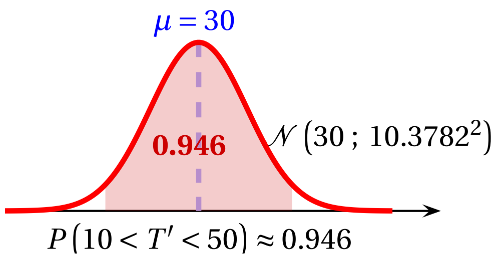
Or la v.a. Z suit la loi normale centrée réduite.
La calculatrice nous donne alors avec la fonction répartition normale réciproque :

$$Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1) \Longrightarrow \frac{7}{\sigma'} \approx 0{,}674\,490$$

Une valeur approchée de σ' arrondie à 10^{-4} près est donc : $\sigma' = \dfrac{7}{0.674490} \approx \underline{10{,}3782}$.

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0{,}75\,,\,0\,,\,1) \approx \underline{0{,}674\,490}$
> - *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0{,}75\,,\,0\,,\,1)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0{,}75\,,\,0\,,\,1)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0{,}75\,,\,1\,,\,0)$

- **Conclusion**



La variable aléatoire T' suit une loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 10.3782$. La calculatrice nous donne à 10^{-4} près :

$$T' \sim \mathcal{N}\left(30\,;\,10.3782^2\right) \Longrightarrow P\left(10 < T' < 50\right) \approx \underline{0{,}9460}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(10\,,\,50\,,\,30\,,\,10.3782) \approx \underline{0{,}946\,034\,88}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(10\,,\,50\,,\,30\,,\,10.3782)$ *ou (fr.) normalfrép*$(10\,,\,50\,,\,30\,,\,10.3782)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(10\,,\,50,\,10.3782\,,\,30\,)$

Le gestionnaire du parking visait l'objectif que 95% des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif n'est donc pas atteint car $\underline{P(10 < T' < 50) \approx 0{,}946 < 0{,}95}$.

Exercice 3. EPI : fonctions — 3 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\,\mathrm{e}^{-x}$$

On a représenté quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.

Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.
Est-ce le cas ?

- Étudions les variations de f_k.
  La fonction f_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on obtient facilement, pour tout réel x et pour tout réel k strictement positif :
  $$f_k'(x) = 1 - k\,\mathrm{e}^{-x}$$

$$\begin{aligned}
f_k'(x) = 0 &\Longleftrightarrow 1 - k\,\mathrm{e}^{-x} = 0\\
&\Longleftrightarrow k\,\mathrm{e}^{-x} = 1\\
&\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{k} \quad \text{car } k \neq 0\\
&\Longleftrightarrow -x = \ln\frac{1}{k} = -\ln k\\
f_k'(x) = 0 &\Longleftrightarrow x = \ln k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_k'(x) > 0 &\Longleftrightarrow 1 - k\,\mathrm{e}^{-x} > 0\\
&\Longleftrightarrow k\,\mathrm{e}^{-x} < 1\\
&\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-x} < \frac{1}{k} \quad \text{car } k > 0
\end{aligned}$$

On compose par la fonction ln strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow -x < \ln\frac{1}{k} = -\ln k\\
f_k'(x) > 0 &\Longleftrightarrow x > \ln k
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$x_k = \ln k$		$+\infty$
Signe de $f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_k	$+\infty$	$\searrow$	$1 + \ln k$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(\ln k) = \ln k + k\,\mathrm{e}^{-\ln k} = \ln k + k \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln k}} = \ln k + 1$$

- Abscisse du point A_k.
  D'après les données, pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et la valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse x_k du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Donc d'après l'étude précédente, $x_k = \ln k$ et les points A_k sont de coordonnées :
  $$A_k\Big(\ln k\ ;\ 1 + \ln k\Big)$$

- Conclusion.
  Pour tout réel k strictement positif, les points $A_k\Big(\ln k\ ;\ 1 + \ln k\Big)$ appartiennent donc à la droite d'équation $y = 1 + x$.
  Ils sont bien alignés.

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Obligatoire : 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
L'objectif est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètres) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur $]0\,;\,1[$ par : $f(x) = 30\ \ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right)$, où x désigne le diamètre en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,1[$.

La fonction f est définie et dérivable sur $]0\,;\,1[$. Elle est de la forme $30\ln u$ donc de dérivée $30 \times \dfrac{u'}{u}$ avec pour tout x de $]0\,;\,1[$:

$u(x) = \dfrac{20x}{1-x}$	$u'(x) = \dfrac{20\times(1-x)-20x\times(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{20}{(1-x)^2}$

Donc pour tout x de $]0\,;\,1[$:

$$f'(x) = 30 \times u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = 30 \times \frac{20}{(1-x)^2} \times \frac{(1-x)}{20x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{30}{x(1-x)}}$$

Or pour x de $]0\,;\,1[$ on a : $\begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$

Et donc f' positive, ce qui implique que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,1[$.

2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité (entre 20 et 120 ans).

On a étudié les variations de f. En outre on obtient facilement les limites (non exigé) :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{20x}{1-x} = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to0+} f(x) = -\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{20x}{1-x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to0+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

x	0		α		β		1
Signe de $f'(x)$	||			+			||
Variations de f	|| $-\infty$	$\nearrow$	20	$\nearrow$	120	$\nearrow$	$+\infty$ ||

La fonction f étant continue et strictement croissante sur $]0\,;\,1[$, et variant de $-\infty$ à $+\infty$, le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence et l'unicité des réels α et β tels que : $20 \leq f(x) \leq 120$.

Remarque : on pouvait ainsi restreindre l'étude sur l'intervalle $[0.01\,;\,0.9]$ *par exemple et calculer les valeurs aux bornes.*

On peut déterminer des valeurs de α et β par balayage ou calculer les valeurs exactes :

$$\begin{aligned}
f(x)=20 &\iff 30\ \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)=20\\
&\iff \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)=\frac{2}{3}\\
&\iff \left(\frac{20x}{1-x}\right)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\\
&\iff 20x=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\times(1-x)\ \text{ car }\ x\in]0\,;1[\\
&\iff 20x=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}-\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}x\\
f(x)=20 &\iff x=\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}{20+\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}\approx 0{,}0887
\end{aligned}$$

Donc $\underline{\alpha\approx 0{,}0887}$.

$$\begin{aligned}
f(x)=120 &\iff 30\ \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)=120\\
&\iff \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)=4\\
&\iff \left(\frac{20x}{1-x}\right)=\mathrm{e}^{4}\\
&\iff 20x=\mathrm{e}^{4}\times(1-x)\ \text{ car }\ x\in]0\,;1[\\
&\iff 20x=\mathrm{e}^{4}-\mathrm{e}^{4}x\\
f(x)=20 &\iff x=\frac{\mathrm{e}^{4}}{20+\mathrm{e}^{4}}\approx 0{,}0887
\end{aligned}$$

Donc $\underline{\beta\approx 0{,}7319}$.

La fonction f étant croissante sur $]0\,;1[$, on en déduit donc que le diamètre doit être compris entre 0,09 mètre (on arrondit par excès) et 0,73 mètre (on arrondit par défaut) pour que ce modèle.

Les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité (entre 20 et 120 ans) est donc : $\underline{0{,}09<x<0{,}73}$.

x	0	α	0.09	0.73	β	1
Variations de f	$-\infty$	20	20.4	119.7	120	$+\infty$

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en m)	11.2	15.6	18.05	19.3	20.55	21.8	23	24.2	25.4	27.6	29.65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0.22	0.245	0.25								

1.

1. a. Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule $D3$. Le terme de la cellule $D3$ correspond à la vitesse de croissance (en mètre par année) entre les ages 80 ans et 70 ans soit :

$$v=\frac{18{,}05-15{,}6}{80-70}=\underline{0{,}245}$$

1. b. Quelle formule a été saisie en $C3$ puis recopié vers la droite ?
la formule saisie en $C3$ puis recopié vers la droite est : $\boxed{=(C2-B2)/(C1-B1)}$.

2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.
Dans la partie A en a modélisé la relation entre l'âge (en années) de l'épicéa et le diamètre de son tronc (en mètres) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur $]0\,;1[$ par : $f(x)=30\ \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$, où x désigne le diamètre en mètre et $f(x)$ l'âge en années. Un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm aurait un âge de :

$$f(0{,}27)\approx 60{,}03\ \text{ ans}$$

Une interpolation linéaire permet alors d'estimer la hauteur de l'épicéa :

	A	B	C
1	Ages (en années)	50	70
2	Hauteurs (en m)	11.2	15.6
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0.22

Sur la période allant de 50 ans à 70 ans l'arbre a grandi de 0,22 mètre par an. A 60 ans, il mesure donc $11,2+10\times 0,22 = \underline{13,4 \text{ m}}$.

3. *La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.*

3. a. Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.

On complète le tableau en calculant les vitesses de croissance manquantes :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Ages (en années)	50	70	80	**85**	**90**	**95**	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en m)	11.2	15.6	18.05	**19.3**	**20.55**	**21.8**	23	24.2	25.4	27.6	29.65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0.220	0.245	**0.250**	**0.250**	**0.250**	0.240	0.240	0.240	0.220	0.205	0.168

La vitesse de croissance est donc maximale entre 80 et 95 ans sur les intervalles $\underline{[80\ ;85],\ [85\ ;90]\ \text{et}\ [90\ ;95]}$.

3. b. Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

On utilise à nouveau la partie A, on a :

$$f(0,7) = 30\ln\left(\frac{20\times 0,7}{1-0,7}\right) \approx 115 \notin [80\ ;\ 95]$$

Il est donc cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm car la période durant laquelle la vitesse de croissance est maximale, et donc la qualité du bois est la meilleure, est dépassée.

Exercice 4. Spécialité : 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un numéro de carte bancaire est de la forme : $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}c$*, où* a_1, a_2, ..., a_{15} *et* c *sont des chiffres compris entre* 0 *et* 9*. Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.* c *est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres. L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.*

Initialisation : I prend la valeur 0
  P prend la valeur 0
  R prend la valeur 0
Traitement : Pour k allant de 0 à 7 :
  R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2a_{2k+1}$ par 9
  I prend la valeur $I + R$
  Fin Pour
  Pour k allant de 1 à 7 :
  P prend la valeur $P + a_{2k}$
  Fin Pour
  S prend la valeur $I + P + c$
Sortie : Si S est un multiple de 10 alors :
  Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
  Sinon :
  Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
  Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

1. a. Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

Pour calculer I avec le numéro 5635 4002 9561 341 1 , on obtient :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	2
R	1	6	8	0	0	3	6	2
I	1	7	15	15	15	18	24	26

1. b. Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

Pour calculer P avec le numéro 5635 4002 9561 341 1 , on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	6	5	0	2	5	1	4
P	6	11	11	13	18	19	23

La valeur de S est donc :

$$S = I + P + c = 26 + 23 + 1 = \underline{50} = 10 \times 5$$

Donc S est un multiple de 10 alors le numéro de la carte est correct.

1. c. On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6. Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu 6a35 4002 9561 3411 reste correct ?

Pour calculer I avec le numéro 6a35 4002 9561 3411 : on obtient :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	6	3	4	0	9	6	3	1
$2a_{2k+1}$	12	6	8	0	18	12	6	2
R	3	6	8	0	0	3	6	2
I	3	9	17	17	17	20	26	28

Pour calculer P avec le numéro 6a35 4002 9561 3411 : on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	a	5	0	2	5	1	4
P	a	$a+5$	$a+5$	$a+7$	$a+12$	$a+13$	$a+17$

La valeur de S est donc :

$$S = I + P + c = 28 + a + 17 + 1 = \underline{46 + a}$$

Pour que S soit un multiple de 10 il faut que :

$$\begin{aligned} S \equiv 0 \ [10] &\iff 46 + a \equiv 0 \ [10] \\ &\iff a \equiv 4 \ [10] \end{aligned}$$

Et donc puisque a est un entier compris entre 0 et 9, la seule possibilité est $\underline{a = 4}$.

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire. Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

Existence

- On calcule le reste modulo 10 de $I + P$.
  Il existe alors un entier naturel n compris entre 1 et 10 tel que $I + P \equiv n \ [10]$ (il suffit de prendre $n = 10$ si le reste obtenu était 0).
- Il suffit alors de choisir $c = 10 - n$, compris entre 0 et 9 tel que :

$$I + P + c \equiv 0 \ [10] \Longrightarrow n + (10 - n) \equiv 0 \ [10]$$

Il existe donc bien une clé c rendant ce numéro correct.

Unicité

- Supposons qu'il existe deux clés valides : c et c'. Alors

$$I + P + c \equiv I + P + c' \ [10] \Longrightarrow c \equiv c' \ [10]$$

Or c et c' sont deux entiers naturels compris entre 0 et 9. Cela signifie donc que $c = c'$ et la clé est unique.

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

On calcule I, P et S pour des numéros de la forme : $nnnn \ \ nnnn \ \ nnnn \ \ nnn \ \ n$, on obtient :

n	**0**	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9
a_{2k+1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2a_{2k+1}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
R	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0
$I = 8 * R$	0	16	32	48	64	8	24	40	56	0
a_{2k}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P = 7 * n$	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$S = I + P + c$	**0**	24	48	72	96	48	72	96	**120**	72

Les seuls numéros possibles de ce type sont :

$\boxed{0000 \ \ 0000 \ \ 0000 \ \ 000 \ \ 0}$ et $\boxed{8888 \ \ 8888 \ \ 8888 \ \ 888 \ \ 8}$

4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct. On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1. Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

On choisit un numéro valide donc la somme $\underline{S \equiv 0[10]}$.

Cas 1 (On échange $a_{2k} = 1$ avec a_{2k+1})

Supposons que l'on échange $a_{2k} = 1$ avec a_{2k+1} (ou a_{2k-1} le raisonnement est identique) . La somme de contrôle S' n'est pas valide et l'on sait que :

$$\begin{cases} S' \equiv \Big(S-(2a_{2k+1}[9])+(2\times 1[9])-1+a_{2k+1}\Big)[10] \\ S \equiv 0[10] \end{cases}$$

$$\Longrightarrow S' \equiv \Big(-(2a_{2k+1}\ [9])+1+a_{2k+1}\Big)\ [10]$$

On peut alors établir la liste des restes possibles :

a_{2k+1}	$S'[10]$
0	1
1	0
2	9
3	**8**
4	7
5	5
6	**4**
7	3
8	2
9	0

Le cas $S' \equiv 0[10]$ est exclu puisque le numéro changé n'est pas valide et tous les autres restes sont différents, donc on peut déterminer l'autre chiffre.

Exemple

Par exemple si l'on trouve dans ce cas $S' \equiv 4[10]$ cela implique que l'autre chiffre était 6 et dans ce cas $S' \equiv 8[10]$ cela implique que l'autre chiffre était 3 (voir exemple 1 qui suivent).

Cas 2 (On échange $a_{2k+1} = 1$ avec a_{2k})

Supposons que l'on échange $a_{2k+1} = 1$ avec a_{2k} (ou a_{2k+2} le raisonnement est identique) . La somme de contrôle S' n'est pas valide et l'on sait que :

$$\begin{cases} S' \equiv \Big(S-(2\ \ [9])+(2a_{2k}\ \ [9])-a_{2k}+1\Big)\ [10] \\ S \equiv 0[10] \end{cases}$$

$$\Longrightarrow S' \equiv \Big((2a_{2k}\ \ [9])-1-a_{2k}\Big)\ [10]$$

On peut alors établir la liste des restes possibles :

a_{2k}	$S'[10]$
0	9
1	0
2	1
3	2
4	**3**
5	5
6	6
7	7
8	8
9	0

Le cas $S' \equiv 0[10]$ est exclu puisque le numéro changé n'est pas valide et tous les autres restes sont différents, donc on peut déterminer l'autre chiffre.

Exemple

Par exemple si l'on trouve dans ce cas $S' \equiv 3[10]$ cela implique que l'autre chiffre était 4 (voir exemple 2 qui suit).

Exemple 1
On peut essayer avec le numéro de la question (1.) soit :

$$5635 \quad 4002 \quad 956\boxed{1} \quad 341 \quad 1$$

On a montré que ce numéro était correct avec $S = 50$.

- Première tentative.
  On peut échanger par exemple $a_{12} = 1$ et $a_{13} = 3$, on obtient le numéro :

$$5635 \quad 4002 \quad 956\boxed{3}\boxed{1}41 \quad 1$$

  Pour calculer I avec le numéro $5635 \quad 4002 \quad 956\boxed{3}\boxed{1}41 \quad 1$: on obtient :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	1	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	2	2
R	1	6	8	0	0	3	2	2
I	1	7	15	15	15	18	20	22

  Pour calculer P avec le numéro $5635 \quad 4002 \quad 956\boxed{3}\boxed{1}41 \quad 1$: on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	6	5	0	2	5	3	4
P	6	11	11	13	18	21	25

  La valeur de S' est donc :

$$S' = I + P + c = \underline{48} \Longrightarrow S' \equiv 8[10] \Longrightarrow \text{Le chiffre changé est } 3$$

- Deuxième tentative.
  On peut échanger par exemple $a_{12} = 1$ et $a_{11} = 6$, on obtient le numéro :

$$5635 \quad 4002 \quad 95\boxed{1}\boxed{6} \quad 341 \quad 1$$

  Pour calculer I avec le numéro $5635 \quad 4002 \quad 95\boxed{1}\boxed{6} \quad 341 \quad 1$: on obtient :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	1	3	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	2	6	2
R	1	6	8	0	0	2	6	2
I	1	7	15	15	15	17	23	25

  Pour calculer P avec le numéro $5635 \quad 4002 \quad 95\boxed{1}\boxed{6} \quad 341 \quad 1$: on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	6	5	0	2	5	6	4
P	6	11	11	13	18	24	28

  La valeur de S' est donc :

$$S' = I + P + c = \underline{54} \Longrightarrow S' \equiv 4[10] \Longrightarrow \text{Le chiffre changé est } 6$$

Exemple 2

On peut essayer avec le numéro de la question (1.) soit :

$$5635 \quad 4002 \quad 9561 \quad 34\boxed{1}\ 1$$

On a montré que ce numéro était correct avec $S = 50$.

On peut échanger par exemple $a_{15} = 1$ et $a_{14} = 4$, on obtient le numéro :

$$5635 \quad 4002 \quad 9561 \quad 3\boxed{1}\boxed{4}\ 1$$

Pour calculer I avec le numéro $5635 \quad 4002 \quad 9561 \quad 3\boxed{1}\boxed{4}\ 1$: on obtient :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	4
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	8
R	1	6	8	0	0	3	6	8
I	1	7	15	15	15	18	24	32

Pour calculer P avec le numéro $5635 \quad 4002 \quad 9561 \quad 3\boxed{1}\boxed{4}\ 1$: on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	6	5	0	2	5	1	1
P	6	11	11	13	18	19	20

La valeur de S' est donc :

$$S' = I + P + c = \underline{53} \Longrightarrow S' \equiv 3[10] \Longrightarrow \text{Le chiffre changé est 4}$$

Fin du devoir

©ISSN 2272-5318