∽ Corrigé du baccalauréat S Centres étrangers ∾
13 juin 2017

Exercice 1 Commun à tous les candidats 5 points

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.

On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$. De plus, une observation statistique a montré que 2 % des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 g, ce qui se traduit dans le modèle considéré par : $P(X \leqslant 170) = 0{,}02$.

Question 1 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'évènement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 grammes » ?

Réponse a : 0,04
Réponse b : $\boxed{0{,}96}$
Réponse c : 0,98
Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données.

On cherche $P(170 \leqslant X \leqslant 180)$.
La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$ et on sait que $P(X \leqslant 170) = 0{,}02$ ce qui s'écrit $P(X \leqslant 175 - 5) = 0{,}02$.
Pour des raisons de symétrie : $P(X \geqslant 175 + 5) = 0{,}02$ ce qui équivaut à $P(X \geqslant 180) = 0{,}02$.
$P(170 \leqslant X \leqslant 180) = 1 - (P(X \leqslant 170) + P(X \geqslant 180)) = 1 - 2 \times 0{,}02 = 0{,}96$

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible.
Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B.
Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,05.

Question 2 : Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

Réponse a : $\boxed{0{,}72}$
Réponse b : 0,28
Réponse c : 0,54
Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données

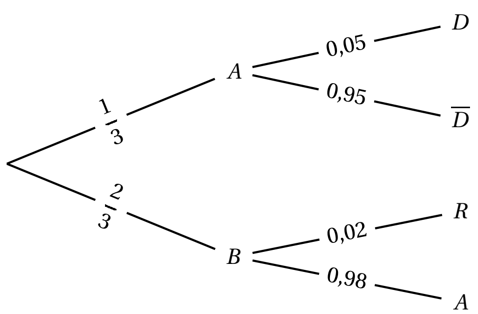
Soit Z la variable aléatoire qui donne le nombre de bonbons déformés dans l'échantillon de 50. D'après le texte, cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}05$.
On cherche $P(Z \geqslant 2) = 1 - P(Z \leqslant 1) \approx 0{,}72$ (à la calculatrice).

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,02.
Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

Question 3 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

Réponse a : 0,02
Réponse b : 0,67
Réponse c : $\boxed{0{,}44}$
Réponse d : 0,01

On regroupe les données du texte dans un arbre pondéré :



On cherche $P_D(B) = \dfrac{P(D \cap B)}{P(D)}$.

$P(D \cap B) = P(B) \times P_B(D) = \dfrac{2}{3} \times 0{,}02 = \dfrac{4}{300}$

D'après la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) = \dfrac{1}{3} \times 0{,}05 + \dfrac{2}{3} \times 0{,}02 = \dfrac{5}{300} + \dfrac{4}{300} = \dfrac{9}{300}$

$P_D(B) = \dfrac{P(D \cap B)}{P(D)} = \dfrac{\frac{4}{300}}{\frac{9}{300}} = \dfrac{4}{9} \approx 0{,}44$

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

Question 4 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

Réponse a : $\boxed{0{,}45}$

Réponse b : 1

Réponse c : 0,55

Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données

La loi exponentielle a pour espérance $E(Y) = 500$ et on sait que $E(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$; donc $\lambda = \dfrac{1}{500} = 0{,}02$.

On sait que si une variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre λ, $P(Y \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Donc $P(Y \leqslant 300) = 1 - \mathrm{e}^{-300 \times 0{,}002} \approx 0{,}45$.

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5 : Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

Réponse a : 40

Réponse b : 400

Réponse c : $\boxed{1\,600}$

Réponse d : 20

L'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$; il est d'amplitude $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

On doit donc avoir $\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}05 \iff \dfrac{2}{0{,}05} < \sqrt{n} \iff 40 < \sqrt{n} \iff n > 1\,600$

Exercice 2 — Commun à tous les candidats — 4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t \\ y &=& 3-t \\ z &=& t \end{array}\right., t \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -5+2t' \\ y &=& -1+t' \\ z &=& 5 \end{array}\right., t' \in \mathbf{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

1. Soit A le point de coordonnées $(2 ; 3 ; 0)$.
   En prenant 0 pour valeur du paramètre t dans la droite d_1, on obtient le point A donc $\text{A} \in d_1$.
2. D'après le cours et les expressions des représentations paramétriques des droites d_1 et d_2, on peut dire que la droite d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\ (1\ ;\ -1\ ;\ 1)$ et que d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\ (2\ ;\ 1\ ;\ 0)$.
   On admet dans le texte que les droites d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires, donc elles ne peuvent pas être parallèles.
3. Soit $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$.
   - $\vec{v} \cdot \overrightarrow{u_1} = 1 \times 1 + (-2) \times (-1) + (-3) \times 1 = 0$ donc $\vec{v} \perp \overrightarrow{u_1}$
   - $\vec{v} \cdot \overrightarrow{u_2} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + (-3) \times 0 = 0$ donc $\vec{v} \perp \overrightarrow{u_2}$

   Donc le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
4. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$.

a. Soit $\overrightarrow{n}\ (a\ ;\ b\ ;\ c)$ un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$; alors $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u_1}$ directeurs du plan $\mathscr{P}$.

- $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u_1} \iff \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{u_1} = 0 \iff a-b+c=0 \iff a-b=-c$
- $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u_2} \iff \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{u_2} = 0 \iff a-2b-3c=0 \iff a-2b=3c$

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b &=& -c \\ a-2b &=& 3c \quad (L_2 \leftarrow L_1 - L_2)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& b-c \\ b &=& -4c\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -5c \\ b &=& -4c\end{array}\right.$$

Tout vecteur de coordonnées $(-5c\ ;\ -4c\ ;\ c)$ avec $c \neq 0$, est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, donc en particulier le vecteur $\overrightarrow{n}\ (5\ ;\ 4\ ;\ -1)$ correspondant à $c=-1$.

Le point M $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{\text{AM}}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$.

$\overrightarrow{\text{AM}} \perp \overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{\text{AM}}\,.\,\overrightarrow{n} = 0 \iff 5(x-2)+4(y-3)-z=0 \iff 5x-10+4y-12-z=0 \iff 5x+4y-z-22=0$

Le plan $\mathscr{P}$ a donc pour équation : $5x+4y-z-22=0$.

b. Les coordonnées du point d'intersection de la droite d_2 et du plan $\mathscr{P}$ vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -5+2t' \\ y &=& -1+t' \\ z &=& 5 \\ 5x+4y-z-22 &=& 0\end{array}\right.$$

Cela n'est possible que si :

$5(-5+2t')+4(-1+t')-5-22=0 \iff -25+10t'-4+4t'-27=0 \iff 14t'=56 \iff t'=4$.

Dans ce cas : $x=-5+2t'=3$, $y=-1+t'=3$ et $z=5$.

La droite d_2 coupe le plan $\mathscr{P}$ en un point B de coordonnées $(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

5. On considère la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\ (1\ ;\ -2\ ;\ -3)$, et passant par le point B $(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

a. D'après le cours, une représentation paramétrique de la droite Δ est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+t'' \\ y &=& 3-2t'' \\ z &=& 5-3t''\end{array}\right. \quad t'' \in \mathbf{R}$

b. Les droites d_1 et Δ de représentations paramétriques respectives $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t \\ y &=& 3-t \\ z &=& t\end{array}\right. \quad t \in \mathbf{R}$ et

$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+t'' \\ y &=& 3-2t'' \\ z &=& 5-3t''\end{array}\right. \quad t'' \in \mathbf{R}$ sont sécantes si on peut trouver t et t'' tels que $\left\{\begin{array}{rcl} 2+t &=& 3+t'' \\ 3-t &=& 3-2t'' \\ t &=& 5-3t''\end{array}\right.$

Ce système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2+(5-3t'') &=& 3+t'' \\ 3-(5-3t'') &=& 3-2t'' \\ t &=& 5-3t''\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 7-3t'' &=& 3+t'' \\ -2+3t'' &=& 3-2t'' \\ t &=& 5-3t''\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4 &=& 4t'' \\ 5t'' &=& 5 \\ t &=& 5-3t''\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1 &=& t'' \\ t'' &=& 1 \\ t &=& 2\end{array}\right.$$

On remplace t par 2 dans la représentation paramétrique de d_1 et on obtient les coordonnées $(4\ ;\ 1\ ;\ 2)$ du point d'intersection C des deux droites sécantes d_1 et Δ.

c. D'après les questions précédentes :

$$\left.\begin{array}{c} \Delta \text{ est dirigée par } \overrightarrow{v} \\ d_1 \text{ est dirigée par } \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \Delta \text{ et } d_1 \text{ sont sécantes en C}\end{array}\right\} \text{donc } \Delta \text{ et } d_1 \text{ sont perpendiculaires en C.}$$

$$\left.\begin{array}{c} \Delta \text{ est dirigée par } \overrightarrow{v} \\ d_2 \text{ est dirigée par } \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_2} \\ \Delta \text{ et } d_2 \text{ sont sécantes en B}\end{array}\right\} \text{donc } \Delta \text{ et } d_2 \text{ sont perpendiculaires en B.}$$

La droite Δ est donc la droite perpendiculaire en C à la droite d_1 et en B à la droite d_2.

Exercice 3 Commun à tous les candidats 6 points

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.
Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\text{e}^{-0,1t}$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20$ μg.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
   On veut déterminer t tel que $f(t) = 10$:
   $f(t) = 10 \iff 20\,\text{e}^{-0,1t} = 10 \iff \text{e}^{-0,1t} = \dfrac{1}{2} \iff -0,1t = -\ln(2) \iff t = 10\ln(2)$
   Donc $t_{0,5} = 10\ln(2) \approx 7$ heures.
2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à 0,2 μg.L^{-1}.
   On résout l'inéquation $f(t) < 0,2$:
   $f(t) < 0,2 \iff 20\,\text{e}^{-0,1t} < 0,2 \iff \text{e}^{-0,1t} < 0,01 \iff -0,1t < \ln(0,01) \iff t > -10\ln(0,01) \iff t > 10\ln(100)$
   La calculatrice donne : $10\ln(100) \approx 46,1$.
   La médicament est éliminé au bout de 46,1 heures soit 46 h et 6 min.
3. En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en μg.L^{-1}.h, le nombre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\text{d}t$.
   Pour ce modèle, l'ASC est $\mathscr{A} = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x 20\,\text{e}^{-0,1t}\,\text{d}t$.
   La fonction $t \longmapsto \text{e}^{-0,1t}$ a pour primitive sur $\mathbf{R}$ la fonction $t \longrightarrow \dfrac{\text{e}^{-0,1t}}{-0,1}$.
   Donc $\displaystyle\int_0^x 20\,\text{e}^{-0,1t}\,\text{d}t = \left[\frac{20\,\text{e}^{-0,1t}}{-0,1}\right]_0^x = -200\,\text{e}^{-0,1x} + 200$
   $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -0,1x = -\infty\\ \text{On pose } X = -0,1x\\ \displaystyle\lim_{X\to-\infty} \text{e}^{X} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-0,1x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(-200\,\text{e}^{-0,1x} + 200\right) = 200$$
   Donc pour ce modèle, l'ASC est égal à 200 μg.L^{-1}.h.

Partie B : administration par voie orale

On note g(t) la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est : $g(t) = 20\left(\text{e}^{-0,1t} - \text{e}^{-t}\right)$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est : $g(0) = 0$ μg.L^{-1}.

1. Pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :
   $g'(t) = 20\left(-0,1\,\text{e}^{-0,1t} - (-1)\,\text{e}^{-t}\right) = 20\left(-0,1\,\text{e}^{-0,1t} + \text{e}^{-t}\right) = 20\,\text{e}^{-t}\left(1 - 0,1\,\text{e}^{0,9t}\right)$
2. On étudie les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:
   $g'(t) > 0 \iff 20\,\text{e}^{-t}\left(1 - 0,1\,\text{e}^{0,9t}\right) > 0 \iff 1 - 0,1\,\text{e}^{0,9t} > 0 \iff 1 > 0,1\,\text{e}^{0,9t} \iff 10 > \text{e}^{0,9t}$
   $$\iff \ln(10) > 0,9t \iff \frac{\ln(10)}{0,9} > t \iff t < \frac{\ln(10)}{0,9}$$
   La fonction g est strictement croissante sur $\left[0\ ;\dfrac{\ln(10)}{0,9}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\ln(10)}{0,9}\ ;\ +\infty\right[$; elle admet un maximum pour $t = \dfrac{\ln(10)}{0,9} \approx 2,55$ soit 2 h 34 min.
   La concentration maximale a lieu au bout de 2 h 34 min.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20 μg.L^{-1}.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 20$.
On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20μg.L^{-1}, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

1. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n = 40 - 40 \times 0{,}5^n$.

- *Initialisation*
  Pour $n = 1$, $u_n = u_1 = 20$ et $40 - 40 \times 0{,}5^n = 40 - 40 \times 0{,}5 = 20$; donc la propriété est vraie au rang 1.
- *Hérédité*
  Soit un entier quelconque $k \geqslant 1$ tel que la propriété soit vraie au rang k, c'est-à-dire $u_k = 40 - 40 \times 0{,}5^k$.
  $u_{k+1} = 0{,}5u_k + 20 = 0{,}5\left(40 - 40 \times 0{,}5^k\right) + 20 = 20 - 40 \times 0{,}5^{k+1} + 20 = 40 - 40 \times 0{,}5^{k+1}$
  Donc la propriété est vraie au rang $k + 1$.
- *Conclusion*
  La propriété est vraie pour $n = 1$; elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$.
  Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a démontré que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 40 - 40 \times 0{,}5^n$.

2. Une suite géométrique de raison q telle que $-1 < q < 1$ est convergente vers 0 donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$.
On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 40$.

3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L^{-1}.
On résout l'inéquation $u_n > 38$:

$$\begin{aligned}
u_n > 38 &\iff 40 - 40 \times 0{,}5^n > 38 \iff 2 > 40 \times 0{,}5^n \iff \frac{1}{20} > 0{,}5^n \\
&\iff \ln\left(\frac{1}{20}\right) > \ln\left(0{,}5^n\right) \text{ car la fonction ln est croissante sur } [0\,;\,+\infty[\\
&\iff \ln\left(\frac{1}{20}\right) > n \times \ln(0{,}5) \text{ propriété de la fonction ln} \\
&\iff \frac{\ln\left(\frac{1}{20}\right)}{\ln(0{,}5)} < n \text{ car } \ln(0{,}5) < 0 \\
&\iff n > \frac{\ln(20)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

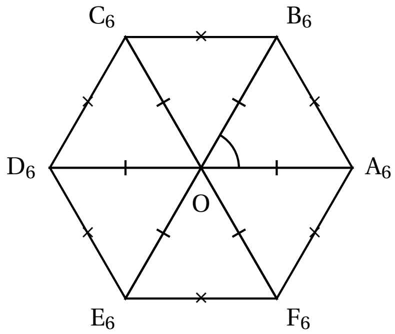
Or $\dfrac{\ln(20)}{\ln(2)} \approx 4{,}32$ donc il faut au moins 5 injections pour atteindre cet équilibre.

Exercice 4 — Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique — 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.
On note $r_n = \text{OA}_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

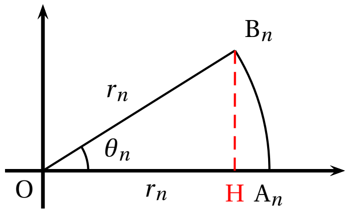
On a représenté ci-contre un polygone P_6.



1. Les triangles tracés sont tous isocèles. Si $n = 6$, il y a 6 triangles donc l'angle $\widehat{A_6OB_6}$ vaut $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ radians. Le triangle isocèle OA_6B_6 est donc équilatéral.
   La somme des aires des 6 triangles vaut 1 donc chaque triangle a une aire de $\dfrac{1}{6}$.
2. Une hauteur dans un triangle équilatéral de côté a vaut $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; donc une hauteur du triangle OA_6B_6 vaut $h = r_6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. On exprime l'aire du triangle OA_6B_6 de deux façons :
   $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}hr_6 \iff \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}r_6\dfrac{\sqrt{3}}{2}r_6 \iff \dfrac{4}{6\sqrt{3}} = r_6^2 \iff r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.
On note alors $r_n e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.



1. Soit H le projeté orthogonal de B_n sur (OA_n). La hauteur issue de B_n dans le triangle OA_nB_n est donc B_nH.
   Dans le triangle OA_nB_n, $\sin(\theta_n) = \dfrac{B_nH}{r_n}$ donc $B_nH = r_n \times \sin(\theta_n)$.
   L'aire du triangle OA_nB_n vaut $\dfrac{1}{2}OA_n \times B_nH = \dfrac{1}{2} \times r_n \times r_n \sin(\theta_n) = \dfrac{1}{2}r_n^2\sin(\theta_n)$.
2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1 ; ce polygone est composé de n triangles isocèles égaux donc l'angle en O de chacun de ces triangles est $\theta_n = \dfrac{2\pi}{n}$.
   La somme des aires des n triangles égaux est 1 donc l'aire d'un triangle est $\dfrac{1}{n}$.
   On exprime l'aire du triangle OA_nB_n de deux façons :
   $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2}r_n^2\sin(\theta_n) \iff \dfrac{2}{n\sin(\theta_n)} = r_n^2 \iff r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin(\theta_n)}}$ donc $r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$.

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,\pi[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$.

Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geqslant 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par : $r_n = \sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$.

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

1. Pour tout $n \geqslant 4$, $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n}$.
   De plus, $\dfrac{2\pi}{n} > 0$ et comme $n \geqslant 4$, $n > 2$ et donc $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{2}$ ce qui entraîne $\dfrac{2\pi}{n} < \dfrac{2\pi}{2}$ autrement dit $\dfrac{2\pi}{n} < \pi$.
   On en déduit donc que $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.
   Cela prouve que les deux réels $\dfrac{2\pi}{n+1}$ et $\dfrac{2\pi}{n}$ appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,\pi[$ sur lequel la fonction f est strictement croissante ; donc comme $\dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n}$, $f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right) < f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$. On peut en déduire que $\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right) < \dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.
   La fonction racine est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc $\sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right)} < \sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ ce qui veut dire que $r_{n+1} < r_n$; la suite (r_n) est donc décroissante.

2. Pour tout $n \geqslant 4$, $r_n > 0$ donc la suite (r_n) est minorée par 0. On a vu que la suite (r_n) était décroissante.
D'après le théorème de la convergence monotone, on peut dire que la suite (r_n) est convergente.
On admet dans la suite de l'exercice que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0{,}58$ faire
	$\quad$ n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

L'algorithme affiche le plus petit n tel que r_n est inférieur ou égal à 0,58.
En utilisant la calculatrice, on obtient $r_{10} \approx 0{,}5833$ et $r_{11} \approx 0{,}5788$.
L'algorithme affiche donc en sortie le nombre 11.

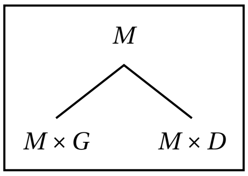
Remarque

La suite (r_n) est décroissante et converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0{,}5642$; on sait de plus que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 0{,}620 > 0{,}58$.
Donc il existe bien un rang n à partir duquel r_n devient inférieur à 0,58.
L'algorithme se termine donc.

Exercice 4 — Candidats ayant choisi la spécialité mathématique — 5 points

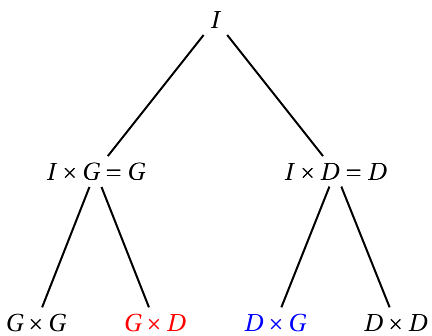
L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.

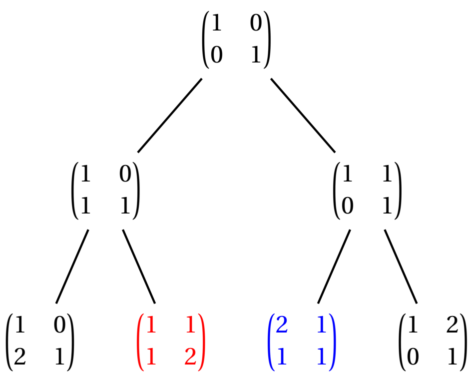
On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$.
On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices $M \times G$ (à gauche) et $M \times D$ (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M.



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

1. On complète l'arbre de Stern-Brocot proposé dans le texte :





$$G \times D = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times1+0\times0 & 1\times1+0\times1\\1\times1+1\times0 & 1\times1+1\times1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$$

$$D \times G = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times1+1\times1 & 1\times0+1\times1\\0\times1+1\times1 & 0\times0+1\times1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers vérifiant : $b + d \neq 0$.

2. On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$.

Le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale de l'arbre correspond à la matrice

$G \times D \times G = (G \times D) \times G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1+1\times 1 & 1\times 0+1\times 1 \\ 1\times 1+2\times 1 & 1\times 0+2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

qui correspond à la fraction $\dfrac{2+1}{3+2} = \dfrac{3}{5}$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre. On rappelle que a, b, c, d sont des entiers.

On note $\Delta_M = ad - bc$, la différence des produits diagonaux de cette matrice.

a. Si $ad - bc = 1$, alors $d(a+c) - c(b+d) = da + dc - cb - cd = ad - bc = 1$.

b. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ donc $\Delta_M = ad - bc$.

Alors $M \times G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix}$ donc $\Delta_{M\times G} = d(a+b) - b(c+d)$.

D'après la question précédente, si $\Delta_M = 1$, alors $\Delta_{M\times G} = 1$.

On admet de même que $\Delta_{M\times D} = 1$, et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité $\Delta_N = 1$.

4. Une matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot associée à la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ vérifie $ad - bc = 1$ et vérifie aussi, d'après les questions précédentes, $d(a+c) - c(b+d) = 1$.

On a donc trouvé deux entiers d et c tels que $d(a+c) - c(b+d) = 1$; d'après le théorème de Bézout, on peut en déduire que les nombres $a+c$ et $b+d$ sont premiers entre eux, donc que la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

5. Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\dfrac{m}{n}$ est irréductible. On considère l'algorithme suivant :

```
VARIABLES :     m et n sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux
TRAITEMENT :    Tant que m ≠ n, faire
                    Si m < n
                        Afficher « Gauche »
                        n prend la valeur n − m
                    Sinon
                        Afficher « Droite »
                        m prend la valeur m − n
```

a. On complète le tableau suivant, pour $m = 4$ et $n = 7$:

Affichage		Gauche	Droite	Gauche	Gauche
m	4	4	1	1	1
n	7	3	3	2	1

Cet algorithme affiche donc : « Gauche - Droite - Gauche - Gauche ».

b. Cet algorithme donne le chemin permettant d'obtenir la matrice de Stern-Brocot associée à la fraction irréductible $\dfrac{m}{n}$; en effet : $G \times D \times G \times G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ qui correspond bien à la fraction $\dfrac{3+1}{5+2} = \dfrac{4}{7}$.

De la même façon, en suivant les résultats du tableau, on voit que la matrice $D \times G \times G$ correspond à la fraction $\dfrac{4}{3}$, que la matrice $G \times G$ correspond à la fraction $\dfrac{1}{3}$, et que la matrice G correspond à la fraction $\dfrac{1}{2}$.