

**Corrigé du baccalauréat S**  
**Nouvelle-Calédonie & Wallis et Futuna – 28 novembre 2017**

**Exercice 1****4 points****Commun à tous les candidats**

Sofia souhaite se rendre au cinéma. Elle peut y aller à vélo ou en bus.

**Partie A : En utilisant le bus**

On suppose dans cette partie que Sofia utilise le bus pour se rendre au cinéma. La durée du trajet entre son domicile et le cinéma (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire  $T_B$  qui suit la loi uniforme sur  $[12 ; 15]$ .

1. On sait que si une variable aléatoire  $T$  suit une loi uniforme sur un intervalle  $[a ; b]$ , alors pour  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ , on a  $P(\alpha \leq T \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$ .

Comme  $T_B$  suit une loi uniforme sur  $[12 ; 15]$ ,  $P(12 \leq T_B \leq 14) = \frac{14 - 12}{15 - 12} = \frac{2}{3}$ .

2. La durée moyenne du trajet est donnée par l'espérance mathématique de la variable aléatoire.

On sait que si une variable aléatoire  $T$  suit une loi uniforme sur un intervalle  $[a ; b]$ , alors  $E(T) = \frac{a + b}{2}$ ; donc la durée moyenne du trajet est  $E(T_B) = \frac{12 + 15}{2} = 13,5$  minutes.

**Partie B : En utilisant son vélo**

On suppose à présent que Sofia choisit d'utiliser son vélo.

La durée du parcours (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire  $T_V$  qui suit la loi normale d'espérance  $\mu = 14$  et d'écart-type  $\sigma = 1,5$ .

1. Si une variable aléatoire  $T$  suit une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ , alors  $P(T < \mu) = 0,5$ .

Comme  $T_V$  suit la loi normale de paramètres  $\mu = 14$  et  $\sigma = 1,5$ , alors  $P(T_V < 14) = 0,5$ .

2. La probabilité que Sofia mette entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma est

$P(12 \leq T_V \leq 13) \approx 0,409$  (trouvé à la calculatrice).

**Partie C : En jouant aux dés**

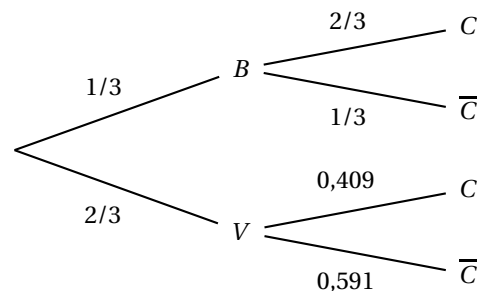
Sofia hésite entre le bus et le vélo. Elle décide de lancer un dé équilibré à 6 faces.

Si elle obtient 1 ou 2, elle prend le bus, sinon elle prend son vélo. On note :

- $B$  l'évènement « Sofia prend le bus »;
- $V$  l'évènement « Sofia prend son vélo »;
- $C$  l'évènement « Sofia met entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma ».

1. Sofia prend le bus quand elle obtient 1 ou 2 en lançant le dé, donc avec une probabilité de  $\frac{1}{3}$ .

On résume les données dans un arbre pondéré :



D'après la formule des probabilités totales :  $P(C) = P(B \cap C) + P(V \cap C) \approx \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times 0,409 \approx 0,49$ .

2. Sachant que Sofia a mis entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma, la probabilité, arrondie à  $10^{-2}$ , qu'elle ait emprunté le bus est  $P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \approx \frac{\frac{2}{9}}{0,49} \approx 0,45$ .

**Exercice 2**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

1. On cherche la limite de la fonction  $f$  en 0 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \implies \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln(x))^2 = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \end{array} \right\} \implies \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln(x))^2}{x} = +\infty \text{ et donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

On en déduit que la droite d'équation  $x = 0$  est asymptote verticale à la courbe  $\mathcal{C}$ .

2. a. On sait que pour tout  $a > 0$ ,  $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$ .

On en déduit que, pour  $x > 0$ ,  $(\ln(\sqrt{x}))^2 = \left(\frac{1}{2} \ln(x)\right)^2 = \frac{1}{4} (\ln(x))^2$ .

On a donc pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  :

$$4 \left( \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2 = 4 \frac{(\ln(\sqrt{x}))^2}{(\sqrt{x})^2} = 4 \times \frac{1}{4} (\ln(x))^2 \times \frac{1}{x} = \frac{(\ln(x))^2}{x} = f(x).$$

- b. En utilisant cette écriture de  $f(x)$ , on cherche la limite de  $f(x)$  en  $+\infty$  :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \text{On pose } X = \sqrt{x} \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

On en déduit que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

3. On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

a. Pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{2 \frac{1}{x} \ln(x) \times x - (\ln(x))^2 \times 1}{x^2} = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}$ .

- b. On étudie le signe de  $f'(x)$  au moyen d'un tableau.

$$\ln(x) > 0 \iff x > 1 \text{ et } 2 - \ln(x) > 0 \iff 2 > \ln(x) \iff e^2 > x \iff x < e^2$$

$x$	0	1	$e^2$	$+\infty$
$\ln(x)$		-	0	+
$2 - \ln(x)$		+	+	0
$x^2$	0	+	+	+
$f'(x) = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}$		-	0	+

c.  $f(1) = \frac{(\ln(1))^2}{1} = 0$  et  $f(e^2) = \frac{(\ln(e^2))^2}{e^2} = \frac{4}{e^2} \approx 0,54 < 1$

On obtient alors le tableau de variations ci-dessous, que l'on complète :

$x$	0	$\alpha$	1	$e^2$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$\frac{4}{e^2} < 1$
					$\downarrow$
					0

4. D'après le tableau de variations précédent, on peut dire que l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution unique sur  $]0; +\infty[$  et que cette solution  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $]0; 1[$ .

$$\begin{cases} f(0,4) \approx 2,1 > 1 \\ f(0,5) \approx 0,96 < 1 \end{cases} \implies \alpha \in ]0,4; 0,5[ \qquad \begin{cases} f(0,49) \approx 1,04 > 1 \\ f(0,50) \approx 0,96 < 1 \end{cases} \implies \alpha \in ]0,49; 0,50[$$

**Exercice 3**

**3 points**

Commun à tous les candidats

**Partie A**

Soit la fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels par  $f(x) = 2e^x - e^{2x}$  et  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé. On admet que, pour tout  $x$  appartenant à  $[0; \ln(2)]$ ,  $f(x)$  est positif.

**Proposition A :**

L'aire du domaine délimité par les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \ln(2)$ , l'axe des abscisses et la courbe  $\mathcal{C}$  est égale à 1 unité d'aire.

Comme la fonction  $f$  est positive sur  $[0; \ln(2)]$ , l'aire du domaine est égale à  $\mathcal{A} = \int_0^{\ln(2)} f(x) dx$ .

La fonction  $f$  a pour primitive la fonction  $F$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $F(x) = 2e^x - \frac{e^{2x}}{2}$ .

Donc  $\mathcal{A} = F(\ln(2)) - F(0) = \left[ 2 \times 2 - \frac{4}{2} \right] - \left[ 2 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$ .

**Proposition A fausse**

**Partie B**

Soit  $n$  un entier strictement positif. Soit la fonction  $f_n$  définie sur l'ensemble des nombres réels par  $f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$  et  $\mathcal{C}_n$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé. On admet que  $f_n$  est dérivable et que  $\mathcal{C}_n$  admet une tangente horizontale en un unique point  $S_n$ .

**Proposition B :**

Pour tout entier strictement positif  $n$ , l'ordonnée du point  $S_n$  est  $n^2$ .

$\mathcal{C}_n$  admet une tangente horizontale au point  $S_n$  d'abscisse  $\alpha$  où  $f_n(\alpha) = 0$ .  
 $f'_n(x) = 2ne^x - 2e^{2x} = 2e^x(n - e^x)$ ;  $f'_n(x) = 0 \iff n - e^x = 0 \iff \ln(n) = x$ .  
 Donc le point  $S_n$  a pour abscisse  $\ln(n)$ ; son ordonnée est  
 $f(\ln(n)) = 2ne^{\ln(n)} - e^{2\ln(n)} = 2n^2 - n^2 = n^2$ .

**Proposition B vraie**

**Exercice 4**

**3 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite des nombres complexes  $(z_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $z_n = \frac{1+i}{(1-i)^n}$ .

1. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

a.  $\frac{z_{n+4}}{z_n} = \frac{\frac{1+i}{(1-i)^{n+4}}}{\frac{1+i}{(1-i)^n}} = \frac{1+i}{(1-i)^{n+4}} \times \frac{(1-i)^n}{1+i} = \frac{1}{(1-i)^4}$

$(1-i)^4 = ((1-i)^2)^2 = (1-2i+i^2)^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$ . Donc  $\frac{z_{n+4}}{z_n} = -\frac{1}{4} \in \mathbf{R}$ .

b.  $\frac{z_{n+4}}{z_n} = -\frac{1}{4} \iff z_{n+4} = -\frac{1}{4}z_n$  qui entraîne  $\overrightarrow{OA_{n+4}} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OA_n}$  et on en déduit que les vecteurs  $\overrightarrow{OA_{n+4}}$  et  $\overrightarrow{OA_n}$  sont colinéaires, ce qui signifie que les points O,  $A_n$  et  $A_{n+4}$  sont alignés.

2. On sait que pour deux nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  non nuls,  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$ .

$$\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ et } \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ donc } \arg(1 - i)^n = -\frac{n\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{On a alors : } \arg\left(\frac{1 + i}{(1 - i)^n}\right) = \arg(1 + i) - \arg((1 - i)^n) [2\pi] = \left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{n\pi}{4}\right) [2\pi] = \frac{(n + 1)\pi}{4} [2\pi]$$

Le nombre  $z_n$  est réel si et seulement si son argument est égal à  $k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$\frac{(n + 1)\pi}{4} = k\pi \iff n + 1 = 4k \iff n = 4k - 1 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Le nombre  $z_n$  est réel si et seulement si  $n = 4k - 1$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 5**

**5 points**

**Candidats n’ayant pas suivi l’enseignement de spécialité**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$ ,  $u_1 = 6$  et, pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ .

**Partie A :**

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite  $(u_n)$  à l’aide d’un tableur.

On a reproduit ci-dessous une partie d’une feuille de calcul, où figurent les valeurs de  $u_0$  et de  $u_1$ .

1. La formule à saisir dans la cellule B4, puis à recopier vers le bas, permettant d’obtenir des valeurs de la suite  $(u_n)$  dans la colonne B est  $= 5*B3/4 - B2/4$

2. On complète le tableau donné dans le texte avec des valeurs approchées à  $10^{-3}$  près de  $u_n$  :

	A	B
1	$n$	$u_n$
2	0	3
3	1	6
4	2	6,75
5	3	6,938
6	4	6,984
7	5	6,996

3. On peut conjecturer que la suite  $(u_n)$  converge vers le nombre 7.

**Partie B : Étude de la suite**

On considère les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies pour tout  $n$  par :  $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$  et  $w_n = u_n - 7$ .

1. a.  $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = v_n$  donc la suite  $(v_n)$  est constante.

b. La suite  $(v_n)$  est constante, donc pour tout  $n$ ,  $v_n = v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 6 - \frac{3}{4} = \frac{21}{4}$ .

$$\text{Donc, pour tout } n, u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{21}{4} \text{ donc } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}.$$

2. a. Soit la propriété  $u_n < u_{n+1} < 15$ .

• **Initialisation**

$u_0 = 3$  et  $u_1 = 6$  donc  $u_0 < u_1 < 15$ ; la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

• **Hérédité**

On suppose que pour  $n \geq 0$ ,  $u_n < u_{n+1} < 15$ ; c’est l’hypothèse de récurrence.

$$u_n < u_{n+1} < 15 \implies \frac{1}{4}u_n < \frac{1}{4}u_{n+1} < \frac{15}{4} \implies \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} < \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{21}{4} < \frac{15}{4} + \frac{21}{4} \text{ ce qui équivaut à } u_{n+1} < u_{n+2} < \frac{36}{4} \text{ c'est-à-dire } u_{n+1} < u_{n+2} < 9.$$

On en déduit que  $u_{n+1} < u_{n+2} < 15$  donc que la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

• **Conclusion**

On a vérifié que la propriété était vraie pour  $n = 0$ ; on a démontré qu’elle était héréditaire pour  $n \geq 0$ . D’après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n < u_{n+1} < 15$ .

*Remarque des correcteurs*

Le majorant de 15 proposé par le texte est très supérieur à la limite de la suite qui est 7. On aurait pu démontrer sans problème par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n < u_{n+1} < 7$ .

Mais peut-être y avait-il eu, dans cette question, une volonté de dissocier le majorant de la limite?

- b. • On a démontré que pour tout  $n$ ,  $u_n < u_{n+1}$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante.
- On a démontré que pour tout  $n$ ,  $u_n < 15$  donc la suite  $(u_n)$  est majorée.

La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente.

3. a. Pour tout  $n$ ,  $w_n = u_n - 7$  donc  $u_n = w_n + 7$ .

- $w_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 = \frac{1}{4}(w_n + 7) - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}w_n + \frac{7}{4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}w_n$
- $w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$

Donc la suite  $(w_n)$  est géométrique de premier terme  $w_0 = -4$  et de raison  $q = \frac{1}{4}$ .

- b. On en déduit que, pour tout  $n$ ,  $w_n = w_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -4 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ .

Or  $u_n = w_n + 7$  donc, pour tout  $n$ ,  $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ .

- c.  $-1 < \frac{1}{4} < 1$  donc, d'après les propriétés des limites des suites géométriques,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$ .

**Exercice 5**

**5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).

Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel  $n$ , cette évolution par :

$$\begin{cases} b_0 = & 1000 \\ c_0 = & 1500 \\ b_{n+1} = & 0,3b_n + 0,5c_n \\ c_{n+1} = & -0,5b_n + 1,3c_n \end{cases}$$

où  $b_n$  représente approximativement le nombre de buses et  $c_n$  le nombre approximatif de campagnols le 1<sup>er</sup> juin de l'année 2000 +  $n$  (où  $n$  désigne un entier naturel).

1. On note  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix}$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n$  la matrice colonne  $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .

a.  $\begin{cases} b_{n+1} = 0,3b_n + 0,5c_n \\ c_{n+1} = -0,5b_n + 1,3c_n \end{cases}$  donc  $\begin{cases} b_1 = 0,3b_0 + 0,5c_0 = 0,3 \times 1000 + 0,5 \times 1500 = 1050 \\ c_1 = -0,5b_0 + 1,3c_0 = -0,5 \times 1000 + 1,3 \times 1500 = 1450 \end{cases}$

Donc  $U_1 = \begin{pmatrix} 1050 \\ 1450 \end{pmatrix}$ .

$\begin{cases} b_2 = 0,3b_1 + 0,5c_1 = 0,3 \times 1050 + 0,5 \times 1450 = 1040 \\ c_2 = -0,5b_1 + 1,3c_1 = -0,5 \times 1050 + 1,3 \times 1450 = 1360 \end{cases}$  donc  $U_2 = \begin{pmatrix} 1040 \\ 1360 \end{pmatrix}$ .

- b. On sait que  $\begin{cases} b_{n+1} = 0,3b_n + 0,5c_n \\ c_{n+1} = -0,5b_n + 1,3c_n \end{cases}$  ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$  c'est-à-dire  $U_{n+1} = AU_n$ .

2. On donne les matrices  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On admet que  $P$  a pour inverse une matrice  $Q$  de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$  où  $a$  est un réel.

a. On doit déterminer le réel  $a$  pour que  $PQ = QP = I$ .

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times a & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times a & 1 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+a & 1 \end{pmatrix}$$

$$PQ = I \iff 1+a=0 \iff a=-1; \text{ donc } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On vérifie : } QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 1 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ -1 \times 1 + 1 \times 1 & -1 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  est l'inverse de la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

b. On admet que  $A = PTQ$ .

Soit la propriété  $A^n = PT^nQ$ .

• **Initialisation**

On a admis que  $A = PTQ$  ce qui s'écrit  $A^1 = PT^1Q$ ; la propriété est donc vraie pour  $n = 1$ .

• **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang  $n \geq 1$  c'est-à-dire  $A^n = PT^nQ$ ; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$A^{n+1} = A \times A^n = (PTQ)(PT^nQ) = P(T(QP)T^n)Q$$

Les matrices  $P$  et  $Q$  sont inverses l'une de l'autre donc  $QP = I$ .

$$TPQ = TI = T \text{ et } T \times T^n = T^{n+1}.$$

On peut donc écrire  $A^{n+1} = PT^{n+1}Q$  ce qui démontre que la propriété est vraie au rang  $n+1$ .

• **Conclusion**

On a vérifié la propriété pour  $n = 1$ . On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout  $n \geq 1$ . D'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

On a donc démontré que, pour tout  $n$  non nul,  $A^n = PT^nQ$ .

c. Soit la propriété  $T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}$  où  $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$ .

• **Initialisation**

$$\text{Pour } n = 1, \begin{pmatrix} 0,8^1 & 0,5 \times 1 \times 0,8^{1-1} \\ 0 & 0,8^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} = T$$

Donc la propriété est vérifiée pour  $n = 1$ .

• **Hérédité**

On suppose la propriété vraie pour  $n \geq 1$  c'est-à-dire  $T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}$ ; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n \times T = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^n \times 0,8 + 0,5n \times 0,8^{n-1} \times 0 & 0,8^n \times 0,5 + 0,5n \times 0,8^{n-1} \times 0,8 \\ 0 \times 0,8 + 0,8^n \times 0 & 0 \times 0,5 + 0,8^n \times 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^{n+1} & 0,8^n \times 0,5 + 0,5n \times 0,8^n \\ 0 & 0,8^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8^{n+1} & 0,5(n+1) \times 0,8^n \\ 0 & 0,8^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang  $n+1$ .

• **Conclusion**

On a vérifié que la propriété était vraie au rang  $n = 1$ . On a démontré qu'elle était héréditaire pour tout  $n \geq 1$ . D'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

On a donc démontré que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}$ .

3. Lucie exécute l'algorithme ci-dessous et obtient en sortie  $N = 40$ .

```

Initialisation : N prend la valeur 0
                 B prend la valeur 1 000
                 C prend la valeur 1 500
Traitement :    Tant que B > 2 ou C > 2
                 N prend la valeur N + 1
                 R prend la valeur B
                 B prend la valeur 0,3R + 0,5C
                 C prend la valeur -0,5R + 1,3C
                 Fin Tant Que
Sortie :        Afficher N
  
```

Pour  $N = 40$  donc au bout de 40 ans, on a à la fois  $B \leq 2$  et  $C \leq 2$ , donc le nombre de buses et de campagnols devient dangereusement réduit.

4. On admet que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $U_n = \begin{pmatrix} 1000 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n \\ 1500 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n \end{pmatrix}$

et  $n \leq 10 \times 1,1^n$ .

- a. D'après la matrice  $U_n$ , on a  $b_n = 1000 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n$  et  $c_n = 1500 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n$ , pour tout  $n$ .

De plus,  $b_n$  et  $c_n$  correspondent respectivement aux nombres de buses et de campagnols donc ce sont des nombres positifs :  $0 \leq b_n$  et  $0 \leq c_n$ .

On sait que  $n \leq 10 \times 1,1^n$ , donc  $1000 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n \leq 1000 \times 0,8^n + \frac{625}{2} \times 10 \times 1,1^n \times 0,8^n$  donc on peut dire que  $b_n \leq 1000 \times 0,8^n + 3125 \times 0,88^n$ .

D'après les propriétés des limites des suites géométriques, comme  $-1 < 0,8 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,8)^n = 0$ , et comme  $-1 < 0,88 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,88)^n = 0$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1000 \times 0,8^n + 3125 \times 0,88^n) = 0$ .

On sait que  $0 \leq b_n \leq 1000 \times 0,8^n + 3125 \times 0,88^n$ ; d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ .

Par un raisonnement similaire, on démontre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ .

- b. Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus, ce qui veut dire que  $c_n > 50$ .

Avec le modèle étudié, le nombre de campagnols tend vers 0 donc deviendra plus petit que 50 à partir d'un certain rang.

À la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice ne paraît donc pas cohérent.