Corrigé du baccalauréat S Liban 29 mai 2018

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1.

Solution : L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$.

Ici, le temps d'attente moyen est donc de $\dfrac{1}{0{,}02} = 50$ secondes.

Il faut ajouter le temps moyen d'échange de 96 secondes.

Finalement le temps moyen d'un appel est de 146 secondes soit 2 minutes et 26 secondes.

2. a.

Solution : On cherche $P(X \geqslant 120)$ avec X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}02$.

$$P(X \geqslant 120) = 1 - P(X < 120) = 1 - \int_0^{120} 0{,}02\mathrm{e}^{-0{,}02t}\,\mathrm{d}t.$$

$$= 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0{,}02t}\right]_0^{120} = \mathrm{e}^{-2{,}4} \approx 0{,}091$$

b.

Solution : On cherche $P(Y \leqslant 90)$ avec Y suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(96\,;\,26^2\right)$.

$P(Y \leqslant 90) = P(0 \leqslant Y \leqslant 90) \approx 0{,}409$ car le temps d'échange Y est positif.

3.

Solution : On cherche à comparer $P(X \leqslant 30)$ et $P_{X \geqslant 60}(X \leqslant 60+30)$.

X suit une loi exponentielle qui est une loi de durée de vie sans vieillissement donc on sait que pour tous les réels t et h strictement positifs, on a :

$p_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = p(X \geqslant h)$ donc $\left(1 - p_{X\geqslant t}(X \leqslant t+h)\right) = \left(1 - p(X \leqslant h)\right)$.

D'où $p_{X\geqslant t}(X \leqslant t+h) = p(X \leqslant h)$.

Avec $t = 60$ et $h = 30$ on a alors $P_{X\geqslant 60}(X \leqslant 60+30) = P(X \leqslant 30)$.

Autrement dit, le fait de raccrocher n'a rien changé à son attente totale.

Exercice 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

1.

Solution :

$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

$1-\mathrm{i} = \overline{(1+\mathrm{i})} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

2. a.

Solution : Posons $Z=(1+\mathrm{i})^n$ alors $\overline{Z} = \overline{(1+\mathrm{i})^n} = \left(\overline{1+\mathrm{i}}\right)^n = (1-\mathrm{i})^n$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n = Z+\overline{Z} = 2Re(Z)$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $Z = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}\right) = \sqrt{2^n}\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right)$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n = 2\sqrt{2^n}\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$

Il faut alors faire des cas suivant les valeurs de n

Pour tout entier naturel k :

✓ si $n=8k$ $(k\in\mathbb{N})$ alors $\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = \cos(2k\pi) = 1$.

✓ si $n=8k+1$ ou $n=8k+7$ alors $\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour $n=8k$ ou $n=8k+1$ ou $n=8k+7$ alors S_n est un réel strictement positif donc $S_n = 2\sqrt{2^n}\left(\cos(0)+\mathrm{i}\sin(0)\right)$.

✓ Si $n=8k+2$ ou $n=8k+6$ alors $\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Pour $n=8k+2$ ou $n=8k+6$ alors S_n n'admet pas de forme trigonométrique

✓ Si $n=8k+3$ ou $n=8k+5$ alors $\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

✓ Si $n=8k+4$ alors $\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = \cos(\pi) = -1$

Pour $n=8k+3$ ou $n=8k+4$ ou $n=8k+5$ alors S_n est un réel strictement négatif donc $S_n = 2\sqrt{2^n}\left(\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi)\right)$

b.

Solution :

Affirmation A : Vraie car $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n = 2Re(Z)\in\mathbb{R}$.

Affirmation B : Vraie car pour tout entier naturel k,

$n=4k+2 \Longrightarrow \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. a.

Solution : Pour $t = 0$ on a $S_1(0)(140\ ;\ 105\ ;\ -170)$

b.

Solution : On sait que les sous-marins se déplacent à vitesse constante. Le premier sous-marin a parcouru la distance AB avec $A = S_1(0)$ et $B = S_1(1)$ en une minute.

$A(140\ ;\ 105\ ;\ -170)$ et $B(80\ ;\ 15\ ;\ -200)$.

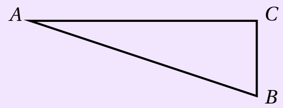
Donc $AB = \sqrt{60^2 + 90^2 + 30^2} = \sqrt{12600} = 30\sqrt{14}$.

La vitesse du premier sous-marin est donc de $30\sqrt{14}$ mètres par minutes soit $1{,}8\sqrt{14} \approx 6{,}73$ km.h^{-1}.

2.

Solution : On considère les points A et B définis précédemment

Soit C le point de l'espace à la verticale de B et ayant la même profondeur que A



Alors (ABC) est le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.

On a $\widehat{BAC} = \alpha = 90 - \widehat{ABC}$.

Or $\overrightarrow{BC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{k}$ car (ABC) est vertical.

On a alors $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{k} = BA \times \left\|\overrightarrow{k}\right\| \times \cos(\widehat{ABC})$. On en déduit $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{k}}{BA}$.

Or $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}60\\90\\30\end{pmatrix}$ donc $BA = 30\sqrt{14}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{k} = 30$

D'où $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{30}{30\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{14}}{14}$ donc $\widehat{ABC} \approx 85{,}5°$.

Finalement $\alpha \approx 15{,}5°$.

3.

Solution : Soit $z_2(t)$ la profondeur du second sous-marin en fonction du temps et v_2 sa vitesse verticale constante (en mètres par minute) alors, par définition on a $z_2(t) = z_2(0) + v_2 t$.

Or $z_2(0) = -68$ car $S_2(0)$ est de coordonnées $(68\ ;\ 135\ ;\ -68)$.

$v_2 = \dfrac{-248 - (-68)}{3} = -60$ car après 3 minutes, le sous-marin est à une profondeur de -248 m

On en déduit $z_2(t) = -68 - 60t$

Avec les mêmes notations on a, pour le premier sous-marin, $z_1(t) = 170 - 30t$

$z_1(t) = z_2(t) \iff -170 - 30t = -68 - 60t \iff t = \dfrac{102}{30} = 3{,}4$, donc les deux sous-marins sont à la même profondeur après 3 min 24 s.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

1.

Solution : f_n est un quotient de deux fonctions dérivables sur $[1\,;\,5]$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f_n est dérivable sur $[1\,;\,5]$

$$f_n = \frac{u}{v} \Longrightarrow f_n' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = nx^{n-1} \end{cases}$$

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1} - nx^{n-1}\ln(x)}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1}\left(1 - n\ln(x)\right)}{x^{2n}} = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$$

Donc on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [1\,;\,5]$, $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$.

2.

Solution : Sur $[1\,;\,5]$, $f_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x) = \dfrac{1}{n} \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ et $f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)}{\mathrm{e}^1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)$. A_n a donc pour coordonnées $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\,;\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right).\right)$

Donc tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$

3. a.

Solution :

$1 \leqslant x \leqslant 5 \Longrightarrow 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$ car $x \longmapsto \ln(x)$ est croissante sur $[1\,;\,5]$

en divisant membre à membre par $x^n > 0$, on obtient bien

pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1;5]$:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

b.

Solution : Pour tout entier $n > 1$, $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^5 x^{-n}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-n+1}\left[x^{-n+1}\right]_1^5 \\ &= \frac{1}{-n+1}\left(5^{-n+1} - 1\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

c.

Solution : $f_n(x) \geqslant 0$ sur $[1~;~5]$ donc l'aire cherchée est donnée par $\displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
On sait que pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1;5]$:

$$0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}.$$

Or l'intégration conserve l'ordre donc $0 \leqslant \displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^5 \dfrac{\ln(5)}{x^n}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_1^5 \dfrac{\ln(5)}{x^n}\,\mathrm{d}x = \ln(5)\int_1^5 \dfrac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\ln(5)}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{5^{n-1}}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$ car 5>1 et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(5)}{n-1}$ =0 donc par opération sur les limites on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^5 \dfrac{\ln(5)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ =0.

D'après le théorème des gendarmes on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ =0.
La limite de l'aire est donc de 0 quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.

Solution : L'énoncé donne $p_{G_n}(G_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ et $p_{\overline{G_n}}\left(\overline{G_{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}$ donc $p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$

$p_2 = p(G_2) = p(G_2 \cap G_1) + p\left(G_2 \cap \overline{G_1}\right)$ d'après les probabilités totales.

$$\begin{aligned} &= p_{G_1}(G_2) \times p(G_1) + p_{\overline{G_1}}(G_2) \times p\left(\overline{G_1}\right)\\ &= \dfrac{1}{4}p_1 + \dfrac{1}{2}(1-p_1)\\ &= \dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{7}{16}. \end{aligned}$$

2.

Solution : G_n et $\overline{G_n}$ forment une partition de l'univers donc
$p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_{n+1} \cap G_n) + P\left(G_{n+1} \cap \overline{G_n}\right)$ d'après la loi des probabilités totales

$$\begin{aligned} &= P_{G_n}(G_{n+1}) \times P(G_n) + P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \times P\left(\overline{G_n}\right)\\ &= \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}(1-p_n)\\ &= -\dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.

Solution : Il semble que la suite $\left(p_n\right)$ converge vers 0,4.

4. a.

Solution :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{5}\\ &= -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10}\\ &= -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{4}u_n\end{aligned}$$

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$.

b.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Or $u_n = p_n - \frac{2}{5}$ donc on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c.

Solution : $-1 < \left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{5}$.

On en déduit qu'après un grand nombre de parties, la probabilité de gagner se stabilise aux alentours de $\frac{2}{5}$.

Exercice 5 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.

Solution :

```
A ← 0
B ← 1
Pour i allant de 1 à n :
    C ← A + B
    A ← B
    B ← C
Fin Pour
```

2.

Solution :

$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ donc $A^2 = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}$ et $A^5 = \begin{pmatrix}8 & 5\\5 & 3\end{pmatrix}$

3. a.

Solution : $A^p = \begin{pmatrix} a_{p+1} & a_p \\ a_p & a_{p-1} \end{pmatrix}$ et $A^q = \begin{pmatrix} a_{q+1} & a_q \\ a_q & a_{q-1} \end{pmatrix}$

$A^p \times A^q = A^{p+q} = \begin{pmatrix} a_{p+q+1} & a_{p+q} \\ a_{p+q} & a_{p+q-1} \end{pmatrix}$

On en déduit, en calculant le terme de A^{p+q} situé sur la seconde ligne et première colonne que pour tous entiers naturels non nuls p et q,

$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$

b.

Solution : Si r divise a_p et a_q alors il existes deux entiers k et k' tels que $a_p = rk$ et $a_q = rk'$

on a alors $a_{p+q} = rk \times a_{q+1} + a_{p-1} \times rk' = r\left(k \times a_{q+1} + a_{p-1} \times k'\right)$

or $\left(k \times a_{q+1} + a_{p-1} \times k'\right) \in \mathbb{Z}$

donc on en déduit que si un entier r divise les entiers a_p et a_q, alors r divise également a_{p+q}

c.

Solution :

Initialisation : pour $n = 1$

a_p divise évidemment $a_{1\times p}$

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul tel que a_p divise a_{np} donc il existe un entier k tel que $a_{np} = k \times a_p$ alors

$$\begin{aligned} a_{(n+1)p} = a_{np+p} &= a_{np} \times a_{p+1} + a_{np-1} \times a_p \\ &= a_p \times \left(k \times a_{p+1} + a_{np-1}\right) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

Or $\left(k \times a_{p+1} + a_{np-1}\right) \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que a_p divise $a_{(n+1)p}$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 1$ or elle est vérifiée à ce rang 1 donc par le principe de récurrence on vient de montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et p, a_p divise a_{np}

4. a.

Solution :

Si $n \geqslant 5$ n'est pas premier alors il existe deux entiers naturels $m \geqslant 3$ et $p \geqslant 2$ tels que $n = mp$ alors $a_n = a_{mp}$ est divisible par a_m d'après la question précédente.

Or pour tout entier $m \geqslant 3$, $a_m > 1$ donc a_n n'est pas premier car divisible par a_m qui est un entier supérieur strictement à 1

Finalement si $n \geqslant 5$ n'est pas premier alors a_n n'est pas premier.

b.

Solution : 4 181 n'est pas un nombre premier mais 19 est premier donc si a_n n'est pas premier, n peut l'être.

On peut conclure que la réciproque de la propriété précédente est fausse.