Math93.com

Baccalauréat 2018 - S
Correction Liban

Série S Obli. et Spé.

29 Mai 2018

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Probabilités — 3 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

1. **Quelle est la durée totale moyenne d'un appel ?**
   Le temps d'attente en seconde est modélisé par la variable X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02\ \text{s}^{-1}$.

Propriété 1

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leq a \leq b$:

$$P\left(a \leq T \leq b\right) = \text{e}^{-\lambda a} - \text{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P\left(T \leq b\right) = 1 - \text{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P\left(T \geq a\right) = \text{e}^{-\lambda a}$$

En outre la variable T est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Donc le temps d'attente moyen est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 50\ \text{s}$$

- Y qui modélise le temps d'échange suit $\mathcal{N}\left(\mu = 96\ ;\ \sigma^2 = 26^2\right)$ donc le temps d'échange moyen est :

$$E(Y) = \mu = 96\ \text{s}$$

- La durée totale moyenne d'un appel est donc de :

$$\underline{E(X) + E(Y) = 146\ \text{s} = 2\ \text{min}\ 26\ \text{s}}$$

2.

2. a. Calculer la probabilité qu'il attende plus de 2 minutes.

On a :

$$P(X > 120\text{ s}) = \mathrm{e}^{-\lambda \times 120} = \underline{\mathrm{e}^{-2,4} \approx 0.0907}$$

2. b. Calculer la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 secondes.

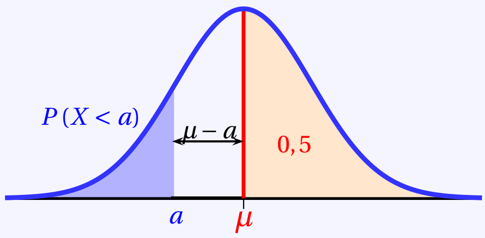
Propriété 2 ($P(X < a)$; $a < \mu$)

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0,5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a < \mu$:

$$\boxed{P(X < a) = 0,5 - P\left(a < X < \mu\right)}$$



Donc :

$$P(Y < 90) = 0,5 - P(90 < Y < 96) \approx \underline{0,409}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 :* $\left(0,5 - \textit{TIStat.normFDR}(90\,,\,96\,,\,96\,,\,26)\right) \approx \underline{0,408747}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(90\,,\,96\,,\,96\,,\,26)$ *ou (fr.) normalfrép*$(90\,,\,96\,,\,96\,,\,26)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(90\,,\,96,\,26\,,\,96\,)$

3. Une étudiante, choisie au hasard parmi les appelants, attend depuis plus d'une minute d'être mise en relation avec le service clientèle. Lasse, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci. Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?

Propriété 3 (Durée de vie sans vieillissement)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h :

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$$

Cette propriété traduit le fait que la loi exponentielle est « sans mémoire ».

D'après la propriété dite de « *durée de vie sans vieillissement* », la probabilité d'attendre moins de 60s + 30s, sachant que l'on a déjà attendu plus d'une minute est égale à celle d'attendre moins de 30s. Le fait de raccrocher ne change rien avec cette modélisation.

$$\begin{aligned} P_{X>60}(X > 60 + 30) &= P(X > 30) \\ &= \underline{\mathrm{e}^{-0,6}} \end{aligned}$$

Exercice 2. Complexes 3 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

1. **Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes 1 + i et 1 − i.**
On a facilement puisque les deux complexes sont conjugués :

$$\begin{cases} 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ 1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\,\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{-\pi}{4}\right) \end{cases}$$

2. *Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$.*

2. a. Déterminer la forme trigonométrique de S_n.
En posant $z_1 = 1+\mathrm{i}$ et $z_2 = 1-\mathrm{i} = \overline{z_1}$ on obtient pour tout entier n :

$$\begin{aligned} S_n &= (1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n \\ &= (z_1)^n + \left(\overline{z_1}\right)^n \\ &= (z_1)^n + \overline{(z_1)^n} \\ &= 2\times \mathrm{Re}\left((z_1)^n\right) \\ &= 2\times \mathrm{Re}\left(\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}}\right)^n\right) \\ &= 2\times \mathrm{Re}\left(\left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{n\,\mathrm{i}\,\pi}{4}}\right) \\ \underline{S_n} &= \underline{2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

Pour obtenir la forme trigonométrique, il faut déterminer un module et un argument de S_n.

- Module :

$$|S_n| = \underline{2\left(\sqrt{2}\right)^n \times \left|\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right|}$$

- Argument et forme trigonométrique :

$$\arg(S_n) = \arg\left(2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Puisque S_n est un réel, tout va dépendre de son signe.
Les valeurs de $\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Signe $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$	+	+	0	-	-	-	0	+	+

– Si $\underline{n = 2+4k\ ,\ k\in\mathbb{N}}$, alors :

$$\underline{S_n = 0}$$

– Si pour $k\in\mathbb{N}$ on a, $\underline{n=8k}$ ou $\underline{n=1+8k}$ ou $\underline{n=7+8k}$ alors S_n est un réel strictement positif donc :

$$S_n = \left|2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right| \times (\cos 0 + \mathrm{i}\,\sin 0)$$

– Si pour $k\in\mathbb{N}$ on a, $\underline{n=3+8k}$ ou $\underline{n=4+8k}$ ou $\underline{n=5+8k}$ alors S_n est un réel strictement négatif donc :

$$S_n = \left|2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right| \times (\cos\pi + \mathrm{i}\,\sin\pi)$$

2. b. *Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.*

- **Affirmation A : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.**
  Cette affirmation est vraie, nous l'avons démontré lors de la question précédente puisque pour tout entier n :

$$\boxed{S_n = \sqrt{2}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{R}}$$

- **Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.**

$$\begin{aligned} S_n = 0 &\iff \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ &\iff \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ &\iff n\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \left(n\frac{\pi}{4}\right) \times \frac{4}{\pi} = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \times \frac{4}{\pi} \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \underline{n = 2 + 4k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

L'affirmation est donc vraie, Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$. On peut le vérifier en prenant $n = 2 + 4k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$:

$$S_n = \sqrt{2}\cos\left((2+4k)\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

Exercice 3. Cinématique — 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée. On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante. À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ dont l'unité est le mètre. Le plan défini par $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. **On admet que, pour tout réel $t \geq 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :** $\begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}$.

1. a. Donner les coordonnées du sous-marin au début.

$$\boxed{S_1(0)\,(140\,;\,105\,;\,-170)}$$

1. b. Quelle est la vitesse du sous-marin ?

Dans les calculs de cinématique, le vecteur vitesse est un vecteur obtenu en dérivant les coordonnées cartésiennes de la position par rapport au temps. La norme de ce vecteur dans ce repère orthonormé nous donne la vitesse :

$$\overrightarrow{v_1(t)} \begin{pmatrix} x'(t) = -60 \\ y'(t) = -90 \\ z'(t) = -30 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|\overrightarrow{v_1(t)}\right| = \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (-30)^2} = \underline{30\sqrt{14} \approx 112{,}25 \text{ m/ min}}$$

Ce qui représente environ : $\underline{6{,}735 \text{ km}/h}$.

2. **On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin. Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal. On donnera l'arrondi de α à 0,1 degré près.**

Déterminons deux positions du sous-marin et un point dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin :

- Pour $t = 0$, on a : $S_1(0) = A\,(140\,;\,105\,;\,-170)$;
- Pour $t = 1$, on a : $S_1(1) = B\,(80\,;\,15\,;\,-200)$;
- Dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin, on considère le point ayant même abscisse et ordonnée que B avec la côte de A soit $C\,(80\,;\,15\,;\,-170)$;

On va alors calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de deux façons.

- D'une part :

$$\begin{cases} S_1(0) = A\,(140\,;\,105\,;\,-170) \\ B\,(80\,;\,15\,;\,-200) \\ C\,(80\,;\,15\,;\,-170) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix} . \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix} = 60^2 + 90^2 = \underline{11\,700}$$

- D'autre part étant dans un repère orthonormée on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos\alpha \\ &= \sqrt{60^2 + 90^2 + 30^2} \times \sqrt{60^2 + 90^2} \times \cos\alpha \\ &= \sqrt{12\,600} \times \sqrt{11\,700} \times \cos\alpha \end{aligned}$$

- Donc par égalité on obtient :

$$\cos\alpha = \frac{11\,700}{\sqrt{12\,600} \times \sqrt{11\,700}} \Longrightarrow \alpha \approx \underline{15{,}5°}$$

3. **Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\,;\,135\,;\,-68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\,;\,-405\,;\,-248)$ avec une vitesse constante. À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?**

On a la position du deuxième sous-marin

$$S_2(t)\left(x_2(t)\,;\,y_2(t)\,;\,z_2(t)\right)$$

Or la vitesse est constante, donc le vecteur dérivée est de coordonnées constantes $(a\,;\,b\,;\,c)$ et on a :

$$\begin{cases} x_2'(t)=a \\ y_2'(t)=b \\ z_2'(t)=c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2(t)=x_2(0)+at \\ y_2(t)=y_2(0)+bt \\ z_2(t)=z_2(0)+ct \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2(t)=68+at \\ y_2(t)=135+bt \\ z_2(t)=-68+ct \end{cases}$$

Par ailleurs on sait que $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\,;\,-405\,;\,-248)$ donc cela nous permet de déterminer a, b et c.

$$\begin{cases} x_2(3)=68+3a=-202 \\ y_2(3)=135+3b=-405 \\ z_2(3)=-68+3c=-248 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2(t)=68-90t \\ y_2(t)=135-180t \\ z_2(t)=-68-60t \end{cases}$$

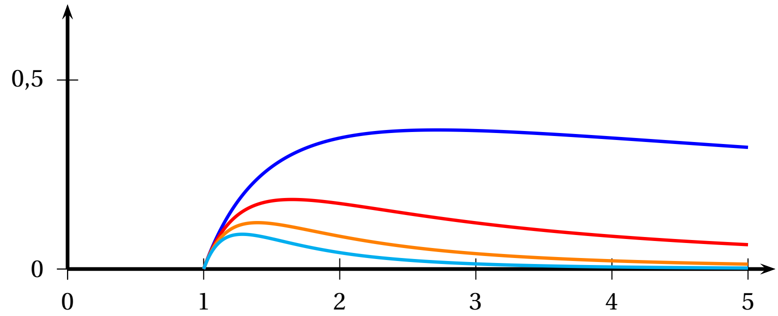
Donc l'instant t, exprimé en minutes, pour lequel les deux sous-marins sont à la même profondeur correspond à l'instant où les côtes des deux sous-marins sont identiques soit :

$$-170-30t=-68-60t \iff 30t=102 \iff \underline{t=3{,}4 \text{ min}}$$

Exercice 4. Fonction — 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle [1 ; 5] par : $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$. . Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal. Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour n appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.



1. **Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle [1 ; 5] : $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$.**

La fonction f_n est définie et dérivable sur [1 ; 5]. Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Pour n entier, $n \geq 1$ et x de [1 ; 5] on a :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x^n - n x^{n-1} \ln x}{(x^n)^2} \\ &= \frac{x^{n-1} - n x^{n-1} \ln x}{x^{2n}} \\ &= \frac{x^{n-1} \times (1 - n \ln x)}{x^{2n}} \\ &= \frac{1 - n \ln x}{x^{2n-n+1}} \\ \underline{f_n'(x)} &= \boxed{\frac{1 - n \ln x}{x^{n+1}}} \end{aligned}$$

2. **Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle [1 ; 5]. On note A_n le point de la courbe $\mathscr{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \ln(x)$.**

- Étudions les variations de f_n.

$$\begin{aligned} f_n'(x_{A_n}) = 0 &\iff 1 - n \ln x_{A_n} = 0 \\ &\iff \ln x_{A_n} = \frac{1}{n} \\ &\iff \underline{x_{A_n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_n'(x_{A_n}) > 0 &\iff 1 - n \ln x_{A_n} > 0 \\ &\iff \ln x_{A_n} > \frac{1}{n} \\ &\iff \underline{x_{A_n} > \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

En conséquence on a avec :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(5) = \dfrac{\ln 5}{5^n} \end{cases}$$

x	1		$x_{A_n}=\text{e}^{\frac{1}{n}}$		5
Signe de $f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f_n	0	$\nearrow$	y_{A_n}	$\searrow$	$\dfrac{\ln 5}{5^n}$

- L'ordonnée du point A_n est alors :

$$\begin{aligned}
y_{A_n} &= f\left(x_{A_n}\right) = \frac{\ln \text{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\text{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}\\
y_{A_n} &= \frac{\frac{1}{n}}{\text{e}^1} = \frac{1}{\text{e}} \times \frac{1}{n}\\
y_{A_n} &= \frac{1}{\text{e}} \ln \text{e}^{\frac{1}{n}}\\
y_{A_n} &= \frac{1}{\text{e}} \ln x_{A_n}
\end{aligned}$$

- Conclusion : Donc tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\text{e}}\ln(x)$.

3.

3. a. Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, a fortiori sur $[1\,;\,5]$ donc pour tout réel x de $[1\,;\,5]$:

$$1 \le x \le 5 \Longrightarrow \ln 1 = 0 \le \ln x \le \ln 5$$

Pour x de $[1\,;\,5]$ et $n \ge 1$, on divise chaque membre par $x^n > 0$ soit :

$$\boxed{0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}}$$

3. b. Montrer que pour tout entier $n > 1$: $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\text{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$.

Pour tout entier $n > 1$, une primitive sur $[1\,;\,5]$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ est $x \longmapsto \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}$ donc :

$$\begin{aligned}
\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\text{d}x &= \int_1^5 x^{-n}\,\text{d}x\\
&= \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^5\\
&= \frac{5^{-n+1} - 1^{-n+1}}{-n+1}\\
&= \frac{1 - 5^{-n+1}}{n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\text{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)}$$

3. c. Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe $\mathscr{C}_n$, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathscr{C}_n$. Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout entier naturel $n > 0$, la fonction f_n est positive sur l'intervalle $[1 ; 5]$ car elle est quotient de deux fonctions positives sur cet intervalle. De ce fait, l'aire cherchée est, en unités d'aire :

$$\mathscr{A}_\backslash = \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,\mathrm{d}x$$

Or d'après la question (3.a.), on sait que sur cet intervalle :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$$

On obtient donc par propriété de l'intégrale (positivité) :

$$0 \leqslant \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\,\mathrm{d}x = \ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x$$

Or d'après la question (3.b) on a :

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

Et puisque $5 > 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ et donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{5^{n-1}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-1} = 0 \end{cases} \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0$$

On a donc montré que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = 0 \\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

Donc par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x = 0$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n = 0$. La valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$ est donc 0

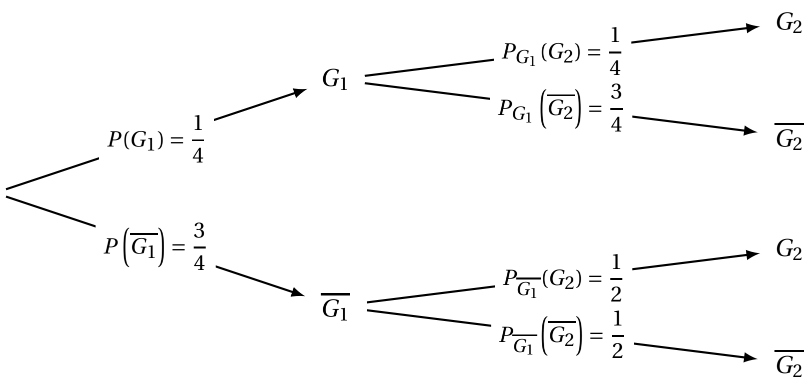
Exercice 5. Obligatoire : Suites — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (et candidats de L)

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante : Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$; Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$; La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$. Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^e partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. **Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.**

   On peut résumer les données dans un arbre :



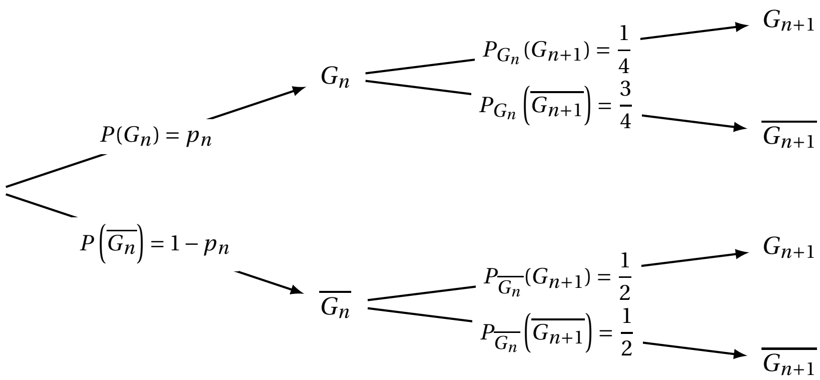
   D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p_2 &= p(G_2) \\ &= p(G_1 \cap G_2) + p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right) \\ p_2 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{p_2 = \frac{7}{16}}$$

2. **Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.**

   On peut résumer les données dans un arbre :



D'après la formule des probabilités totales on a pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p\left(G_{n+1}\right) \\ &= p\left(G_n \cap G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right) \\ p_{n+1} &= p_n \times \frac{1}{4} + \left(1 - p_n\right) \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul,

$$\boxed{p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}}$$

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n. Quelle conjecture peut -on émettre ?

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

On peut conjecturer que la limite de la suite (p_n) soit $0,4$.

4. *On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.*

4. a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Les suites $\left(p_n\right)$ et (u_n) sont définies pour tout entier n par :

$$\left(p_n\right) : \begin{cases} p_1 & = 0,25 \\ p_{n+1} & = - -0,25 \times p_n + 0,5 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (u_n) : \begin{cases} u_1 & \\ u_n & = p_n - -0,4 \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,4 \\ u_{n+1} &= \left(-0,25\ p_n + 0,5\right) - 0,4 \\ u_{n+1} &= -0,25 \times p_n + 0,1 \\ u_{n+1} &= -0,25 \times \left(p_n + \frac{0,1}{-0,25}\right) \\ u_{n+1} &= -0,25 \times \left(p_n - 0,4\right) \\ u_{n+1} &= -0,25 \times u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = -0,25$, et de premier terme $u_1 = -0,15$ puisque :

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1 - 0,4 \\ u_1 &= 0,25 - 0,4 \\ u_1 &= -0,15 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_1 & = -0,15 \\ u_{n+1} & = -0,25 \times u_n \end{cases} ;\ \forall n \geq 1}$$

4. b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = -0,25$, et de premier terme $u_1 = -0,15$ donc son terme général est

$$\forall n \geq 1\ ;\ u_n = u_1 \times (q)^{n-1}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \geq 1\ ;\ u_n = -0,15 \times (-0,25)^{n-1}}$$

De l'égalité définie pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = p_n - 0{,}4$$

On peut en déduire l'expression :

$$p_n = u_n + 0{,}4$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \geq 1\ ;\ p_n = -0{,}15 \times (-0{,}25)^{n-1} + 0{,}4}$$

4. c. La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Ici $-1 < q = -\dfrac{1}{4} < 1$ et d'après le théorème 1 on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\left(-\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}\right)}_{p_n} = \frac{2}{5}$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (p_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{5}}$$

Sur le long terme, la probabilité qu'un joueur gagne une partie est 0,4.

Exercice 5. Spécialité : Arithmétique et Suites 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit la suite de réels (a_n) par :

$$\begin{cases} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & a_n + a_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution la variable A contienne le terme a_n.

```
1  A ← 0
2  B ← 1
3  Pour i allant de 2 à n :
4      C ← A + B
5      A ← B
6      B ← C
7  Fin Pour
```

Remarque

Un problème dans la boucle, il faudrait écrire en ligne 3, Pour i allant de 1 à n mais cela n'est pas impactant pour la suite.

On obtient ainsi les premières valeurs de la suite a_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 et A^4 et vérifier que $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

- $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+1 \\ 2+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A^4 = A \times A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & 2+1 \\ 3+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;
- $A^5 = A \times A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3 & 3+2 \\ 5+0 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. *On peut démontrer, et nous admettrons, que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$.*

3. a. Soit p, q deux entiers naturels non nuls. Calculer $A^p \times A^q$ et en déduire que $a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$.

Soit p, q deux entiers naturels non nuls :

$$\begin{aligned} A^p \times A^q &= \begin{pmatrix} a_{p+1} & a_p \\ a_p & a_{p-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{q+1} & a_q \\ a_q & a_{q-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{p+1} \times a_{q+1} + a_p \times a_q & a_{p+1} \times a_q + a_p \times a_{q-1} \\ \boxed{a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q} & a_p \times a_q + a_{p-1} \times a_{q-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or on a aussi pour p, q deux entiers naturels non nuls :

$$A^p \times A^q = A^{p+q} = \begin{pmatrix} a_{p+q+1} & a_{p+q} \\ \boxed{a_{p+q}} & a_{p+q-1} \end{pmatrix}$$

Donc par identification des coefficients $(2,1)$ ou $(1,2)$ des deux matrices on obtient, pour p, q deux entiers naturels non nuls :

$$\boxed{a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q.}$$

3. b. En déduire que si un entier r divise les entiers a_p et a_q, alors r divise également a_{p+q}.

Soit un entier r qui divise les entiers a_p et a_q. Alors il existe des entiers k et k' tels que :

$$a_p = r \times k \text{ et } a_q = r \times k'$$

De ce fait d'après la question (3.a.) :

$$\begin{aligned} a_{p+q} &= a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q \\ a_{p+q} &= r \times k \times a_{q+1} + a_{p-1} \times r \times k' \\ a_{p+q} &= r \times \underbrace{\left(k \times a_{q+1} + a_{p-1} \times k'\right)}_{\in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Donc si un entier r divise les entiers a_p et a_q, alors r divise également a_{p+q}.

> **Remarque**
> On pouvait aussi passer par les modulos.
>
> $$r \text{ divise } a_p \iff a_p \equiv 0 \ [r]$$

3. c. Soit p un entier naturel non nul. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np}.

- Initialisation.
  Pour $n = 1$ on a évidemment a_p divise $a_{np} = a_p$
- Hérédité.
  On suppose la propriété vraie au rang $n \geq 1$ soit :

  $$a_p \text{ divise } a_{np}$$

  alors

  $$a_{(n+1)p} = a_{np+p}$$

  On applique la question précédente avec $r = a_p$:

  $$\begin{cases} r = a_p \text{ divise } a_{np} & \text{(HR)} \\ r = a_p \text{ divise } a_p \end{cases} \implies r = a_p \text{ divise } a_{np+p} = a_{(n+1)p}$$

- Conclusion : La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire. Par conséquent, pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np}.

4.

4. a. Soit n un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que si n est un entier naturel qui n'est pas premier, alors a_n n'est pas un nombre premier.

On rappelle les premières valeurs de la suite (a_n).

n	0	1	2	3	4	5
a_n	0	1	1	2	3	5

Le cas $a_2 = 1$ pose problème pour cette question, il va falloir le lever.

- Soit n un entier supérieur ou égal à 5.
  Si n est un entier naturel qui n'est pas premier, alors il est composé et peut s'écrire $n = pq$ avec p et q entiers, $1 < p < n$ et $1 < q < n$.
- Puisque n est supérieur ou égal à 5, et non premier, il est supérieur ou égal à 6.
  De ce fait, l'un au moins des deux nombres p ou q est strictement supérieur à 2. On peut supposer que c'est p et donc que $2 < p < n$.
- On admet alors que la suite (a_n) est strictement croissante. Puisque $a_3 = 2$ et $p > 2$ alors $a_p > 1$ et le problème du cas $a_2 = 1$ est réglé .

$$\begin{cases} (a_n) \text{ croissante} \\ a_3 = 2 \\ 2 < p < n \end{cases} \Longrightarrow a_p > 1$$

- Alors d'après la question (3.c), on sait que pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np} et donc a_p divise $a_{pq} = a_n$. Puisque $a_p > 1$, et que $a_p \neq a_n$ (car $p < n$ et que la suite (a_n) est strictement croissante), cela implique que a_n n'est pas un nombre premier.

$$\begin{cases} a_p \mid a_{pq} = a_n \ \ (3.c.) \\ a_p > 1 \text{ et } a_p \neq a_n \end{cases} \Longrightarrow a_n \text{ composé}$$

Remarque

$$\begin{cases} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & a_n + a_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1. \end{cases}$$

On peut montrer par récurrence (forte) que la suite (a_n) est positive strictement (à partir de $n = 1$). Il est alors aisé de déduire que (a_n) est croissante strictement puisque par définition, pour $n \geq 2$ entier on a :

$$a_{n+1} - a_n = a_{n-1} > 0$$

4. b. On peut calculer $a_{19} = 4181 = 37 \times 113$. Que penser de la réciproque de la propriété obtenue en (4. a.) ?

Puisque $a_{19} = 4181 = 37 \times 113$ est composé et que $n = 19$ est premier, on a exhibé un contre-exemple permettant d'invalider la réciproque de la propriété obtenue dans la question 4. a.

Si a_n n'est pas premier, alors on ne peut pas affirmer que n ne le soit pas.

Fin du devoir